

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

**Математическое и компьютерное моделирование
естественно-научных и социальных проблем**

*Материалы
XVII Всероссийской с международным участием
научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов*

Россия, г. Пенза, 1–4 июня 2023 г.

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

**Mathematical and Computer Modelling
of Natural Science and Social Problems (MCM-2023)**

*Proceedings of the Seventeen Russian Conference
with international participation MCM-2023*

Penza, Russian Federation, 1–4 June, 2023

E d i t e d b y
Ilya V. Boykov

Пенза • Издательство ПГУ • 2023

УДК 51
ББК 22.1
М64

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XVII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 1–4 июня 2023 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. – 334 с.

ISBN 978-5-907752-36-8

Отражены основные результаты работы конференции, охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теория приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, экологии, биологии; математические модели в физике, нанотехнике и нанобиологии; нейроматематика и нейрокомпьютеры.

Издание предназначено для обучающихся по направлению подготовки «Прикладная математика» и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

УДК 51
ББК 22.1

Программный комитет

И. В. Бойков, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *председатель*;
В. И. Паньженский, к.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *заместитель председателя*; **Д. В. Артамонов**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
В. И. Горбаченко, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. П. Ильин**, д.ф.-м.н., профессор (Новосибирск, Россия); **В. Д. Кревчик**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **П. П. Макарычев**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
П. С. Мартышко, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН (Екатеринбург, Россия); **М. В. Носков**, д.ф.-м.н., профессор (Красноярск, Россия); **В. И. Половинкин**, д.ф.-м.н., профессор (Санкт-Петербург, Россия);
В. С. Сизиков, д.т.н., профессор (Санкт-Петербург, Россия); **Д. Н. Сидоров**, д.ф.-м.н., профессор, профессор РАН (Иркутск, Россия); **Ю. Г. Смирнов**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **Л. А. Сухарев**, к.ф.-м.н., доцент (Саранск, Россия); **С. Фаудаоглы**, д.ф.-м.н., профессор (Измир, Турция); **Л. Р. Фионова**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **М. А. Щербаков**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **Л. А. Купряшина**, к.пед.н., доцент (Пенза, Россия) – *ответственный секретарь конференции*

Приказ о проведении XVII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (МКМ-2023) № 357/о от 04.04.2023

ISBN 978-5-907752-36-8

© Пензенский государственный университет, 2023

1. ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

УДК 621.371

Математическая модель и результаты анализа нелинейной дифракции электромагнитных волн на магнитных нанорешетках

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Разработана математическая модель нелинейной дифракции электромагнитных волн на 2D-магнитных нанорешетках, базирующаяся на решении нелинейной краевой задачи дифракции для системы уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау – Лифшица, в котором учитывается поле обменного взаимодействия, дополненной электродинамическими граничными условиями и условием неасимптотического излучения. С помощью вычислительного алгоритма, разработанного методом автономных блоков с каналами Флоке и магнитными нановключениями, получены результаты электродинамического расчета элемента матрицы рассеяния $|S_{12}|$ периодических 2D-решеток магнитных микро- и наночастиц (ферритовых наносфер) в зависимости от нормированной частоты при изменении периода решетки с учетом спектра магнитостатических и спин-волновых колебаний в СВЧ-диапазоне частот.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача дифракции, 2D-решетки магнитных наночастиц, метод автономных блоков, каналы Флоке, матрица рассеяния

Mathematical model and results of analysis of nonlinear diffraction of electromagnetic waves on magnetic nanogratings

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia
radiotech@pnzgu.ru

Abstract. A mathematical model of nonlinear diffraction of electromagnetic waves by magnetic 2D gratings has been developed, based on solving a nonlinear boundary value problem of diffraction for the system of Maxwell equations together with the Landau-Lifshitz equation, which takes into account the field of exchange interaction, supplemented by electrodynamic boundary conditions and the condition of non-asymptotic radiation. Using a computational algorithm developed by the method of autonomous blocks with Floquet channels and magnetic nanoinclusions (MFAB), the results of an electrodynamic calculation of the element of the

scattering matrix $|S_{12}|$ of periodic 2D gratings of magnetic micro- and nanoparticles (ferrite nanospheres) depending on the normalized frequency with a change in the grating period, taking into account the spectrum of magnetostatic and spin-wave oscillations in the microwave frequency range.

Keywords: nonlinear boundary value problem of diffraction, 2D gratings of magnetic and nanoparticles, method of autonomous blocks, Floquet channels, scattering matrix

1. Формулировка нелинейной краевой задачи электродинамики для магнитных нанорешеток

Необходимо решить систему уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау-Лифшица, в котором учитывается поле обменного взаимодействия [1]:

$$\text{rot } \vec{H}(t) = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \sigma \vec{E}(t), \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{E}(t) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{M}(t) + \mu_0 \vec{H}(t)), \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma(\vec{M}(t) \times (\vec{H}(t) + \vec{H}_q(t)) + \omega_r(\chi_0 \vec{H}(t) - \vec{M}(t)), \quad (3)$$

$$\text{rot } \vec{M}(t) = \vec{F}(t), \quad (4)$$

$$\text{rot } \vec{F}(t) = -q^{-1} \vec{H}_q(t) \quad (5)$$

с соответствующими электродинамическими граничными условиями.

Сведем систему нестационарных нелинейных уравнений (1)–(5) к стационарным полагая, что электромагнитные (ЭМ) поля источников с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ являются монохроматическими.

Представим векторные функции $\vec{E}(t)$, $\vec{H}(t)$, $\vec{M}(t)$, $\vec{F}(t)$, $\vec{H}_q(t)$ в виде рядов по всевозможным комбинационным частотам

$$\begin{aligned} \vec{E}(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega_m) \exp(i\omega_m t); \quad \vec{H}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{H}(\omega_m) \exp(i\omega_m t); \\ \vec{M}(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{M}(\omega_m) \exp(i\omega_m t); \quad \vec{F}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{F}(\omega_m) \exp(i\omega_m t); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\vec{H}_q(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{H}_q(\omega_m) \exp(i\omega_m t),$$

и подставим эти ряды в систему уравнений (1)–(5).

В результате получим систему стационарных нелинейных уравнений ЭМ поля, в которых учитывается поле обменного взаимодействия, на каждой из комбинационных частот:

$$\text{rot } \vec{H}(\omega_m) = i \omega_m \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}(\omega_m) \vec{E}(\omega_m) \quad (7a)$$

$$\text{rot } \vec{E}(\omega_m) = -i \omega_m \vec{M}(\omega_m) - i \omega_m \mu_0 \vec{H}(\omega_m); \quad (7б)$$

$$\gamma \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_{ij} (\vec{M}(\omega_i) \times (\vec{H}(\omega_j) + \vec{H}_q(\omega_j))) = -(\omega_r + i \omega_m) \vec{M}(\omega_m) + \quad (7в)$$

$$+ \omega_r \chi_0 \vec{H}(t) - \gamma \vec{M}_0 \times \vec{H}(\omega_m) - \gamma \vec{M}_0 \times \vec{H}_q(\omega_m) - \gamma \vec{M}(\omega_m) \times \vec{H}_0;$$

$$\text{rot } \vec{M}(\omega_m) = \vec{F}(\omega_m); \quad (7г)$$

$$\text{rot } \vec{F}(\omega_m) = -q^{-1} \vec{H}_q(\omega_m); \quad (7д)$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где ω_m – комбинационные частоты ($\omega_m > 0$, $\omega_{-m} = -\omega_m$, $\omega_0 = 0$);

$$\vec{H}_0 = \vec{H}(\omega_0);$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}(\omega_0); \quad \dot{\varepsilon}(\omega_m) = \varepsilon(\omega_m) - i \frac{\sigma(\omega_m)}{\varepsilon_0 \omega_m}; \quad \gamma_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_i + \omega_j \neq \omega_m, \\ 1, & \text{если } \omega_i + \omega_j = \omega_m. \end{cases}$$

2. Решение нелинейной краевой задачи дифракции (уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау-Лифшица) для магнитных нанорешеток

Рассмотрим нелинейную задачу дифракции *ТЕМ*-волны на периодической 2D решетке магнитных наночастиц (МНЧ) в немагнитной диэлектрической матрице (рис. 1).

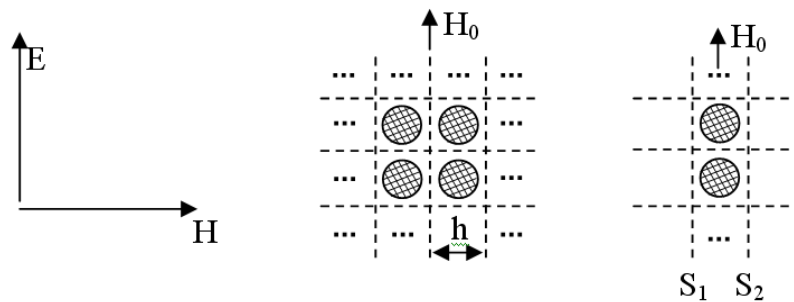


Рис. 1. Геометрия задачи дифракции *ТЕМ*-волны на периодической 2D- решетке МНЧ

Магнитные наночастицы находятся между сечениями S_1, S_2 (рис. 1). Пусть на входное сечение S_1 падает *ТЕМ*-волна (с амплитудой

$c_{1(1)}^+(\omega)$ и частотой ω), распространяющаяся поперечно по отношению к направлению постоянного поля подмагничивания $\vec{H}_0$.

Неизвестными в задаче дифракции являются амплитуды $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ отраженных ЭМ волн на сечениях S_1, S_2 , если амплитуды $c_{k(\alpha)}^+(\omega_m)$ ЭМ волн, падающих на входные сечения S_1 известны (ω_m – комбинационные частоты, α – номер входного сечения $S\alpha$, $\alpha = 1, 2$; k – индекс собственных волн). На сечениях S_1, S_2 вводятся локальные системы координат.

Приближенное решение задачи дифракции будем искать в виде редуцированных рядов:

$$\bar{E}^N(\omega_m) = \sum_{n=1}^N a_n^t(\omega_m) \bar{e}_n^t(\omega_m) + a_n^z(\omega_m) \bar{e}_n^z(\omega_m), \quad (8)$$

$$\bar{H}^N(\omega_m) = \sum_{n=1}^N b_n^t(\omega_m) \bar{h}_n^t(\omega_m) + b_n^z(\omega_m) \bar{h}_n^z(\omega_m)$$

$$\bar{M}^N(\omega_m) = \sum_{n=1}^N \mu_0 \mu_1(\omega_m) (d_n^t(\omega_m) \bar{h}_n^z(\omega_m) + d_n^z(\omega_m) \bar{h}_n^t(\omega_m)),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, q,$$

где N – число учтенных собственных волн ВС; $a_n^t(\omega_m)$, $b_n^t(\omega_m)$, $a_n^z(\omega_m)$, $b_n^z(\omega_m)$, $d_n^t(\omega_m)$, $d_n^z(\omega_m)$ – неизвестные функции продольной координаты z [2]; $\bar{e}_n^t(\omega_m)$, $\bar{h}_n^t(\omega_m)$, $\bar{e}_n^z(\omega_m)$, $\bar{h}_n^z(\omega_m)$ – поперечные и продольные компоненты собственных волн ВС, заполненной линейной средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями $\epsilon_1(\omega_m)$, $\mu_1(\omega_m)$.

Подставляя (8) в (3) и проектируя $\bar{E}^N$, $\bar{H}^N$ на базисы $\bar{e}_k(\omega_m)$, $\bar{h}_k(\omega_m)$, $\bar{e}_k^z(\omega_m)$, $\bar{h}_k^z(\omega_m)$, получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{aligned} \frac{db_k^t(\omega_m)}{dz} &= -i\Gamma_k(\omega_m)b_k^z(\omega_m) + i\omega_m \sum_{n=1}^N (A_{kn}^t(\omega_m)b_n^z(\omega_m) - B_{kn}^t(\omega_m)a_n^t(\omega_m)); \\ \frac{da_k^t(\omega_m)}{dz} &= -i\Gamma_k(\omega_m)a_k^z(\omega_m) + \\ &+ i\omega_m \sum_{n=1}^N (C_{kn}^t(\omega_m)(a_n^z(\omega_m) - d_n^t(\omega_m)) - D_{kn}^t(\omega_m)b_n^t(\omega_m)); \end{aligned} \quad (9)$$

решаемых совместно с системами нелинейных алгебраических уравнений (АУ)

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N (B_{kn}^z(\omega_m) a_n^z(\omega_m) - A_{kn}^z(\omega_m) b_n^t(\omega_m)) = 0, \\
& \sum_{n=1}^N (C_{kn}^z(\omega_m)(a_n^t(\omega_m) - d_n^z(\omega_m)) - D_{kn}^z(\omega_m) b_n^z(\omega_m)) = 0, \\
& \sum_{n=1}^N (\alpha_r D_{kn}^z(\omega_m) b_n^z(\omega_m) - \beta_r C_{kn}^z(\omega_m) d_n^z(\omega_m)) = 0, \\
& \sum_{n=1}^N (\alpha_r D_{kn}^t(\omega_m) b_n^t(\omega_m) - \beta_r C_{kn}^t(\omega_m) d_n^t(\omega_m) - \\
& - \gamma \sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q \gamma_{ij} (X_{kn}(\omega_i, \omega_j) d_n^t(\omega_i) b_n^z(\omega_j) + Y_{kn}(\omega_i, \omega_j) d_n^z(\omega_i) b_n^t(\omega_j))) = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $m = 0, 1, 2, \dots, q$; $k, n = 1, 2, \dots, N$;

$$\alpha_r = \frac{\omega_r \chi_0}{\mu_0}, \quad \beta_r = \omega_r + i\omega_m;$$

$\Gamma_k(\omega_m)$ – постоянные распространения собственных волн ВС,

$$\begin{aligned}
A_{kn}^t(\omega_m) &= \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \varepsilon_0 \varepsilon_1(\omega_m) \vec{e}_n(\omega_m) \vec{e}_k(\omega_m) ds; \\
B_{kn}^t(\omega_m) &= \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \vec{e}_n(\omega_m) \vec{e}_n(\omega_m) ds; \\
A_{kn}^z(\omega_m) &= \int_S \varepsilon_0 \varepsilon_1(\omega_m) \vec{e}_n^z(\omega_m) \vec{e}_k^z(\omega_m) ds; \\
B_{kn}^z(\omega_m) &= \int_S \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \vec{e}_n^z(\omega_m) \vec{e}_k^z(\omega_m) ds; \\
C_{kn}^t(\omega_m) &= \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \mu_0 \mu_1(\omega_m) \vec{h}_n(\omega_m) \vec{h}_k(\omega_m) ds; \\
D_{kn}^t(\omega_m) &= \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \mu_0 \mu(\omega_m) \vec{h}_n(\omega_m) \vec{h}_k(\omega_m) ds; \\
C_{kn}^z(\omega_m) &= \int_S \mu_0 \mu_1(\omega_m) \vec{h}_n^z(\omega_m) \vec{h}_k^z(\omega_m) ds; \\
D_{kn}^z(\omega_m) &= \int_S \mu_0 \mu(\omega_m) \vec{h}_n^z(\omega_m) \vec{h}_k^z(\omega_m) ds;
\end{aligned}$$

$$X_{kn}(\omega_i, \omega_j) = \int_S \mu_0 \mu_1(\omega_m) ((\bar{h}_n(\omega_i) \times \bar{h}_n^z(\omega_j)) \cdot \vec{h}_k(\omega_m)) ds;$$

$$Y_{kn}(\omega_i, \omega_j) = \int_S \mu_0 \mu_1(\omega_m) ((\bar{h}_n^z(\omega_i) \times \bar{h}_n(\omega_j)) \cdot \vec{h}_k(\omega_m)) ds.$$

Здесь S – поперечное сечение ВС, $R_k(\omega_m)$ – коэффициент нормировки:

$$\int_S (\vec{e}_k(\omega_m) \times \vec{h}_n(\omega_m)) ds = \delta_{kn} R_k(\omega_m),$$

где δ_{kn} – символ Кронекера.

Сформулируем граничные условия для стационарных нелинейных уравнений Максвелла (9). Задавая условия неасимптотического излучения [3]

$$\int_{S_\alpha} ((\vec{E}(\omega_m) \times \vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m)) + (\vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}(\omega_m))) d\vec{s}_\alpha = 2C_{k(\alpha)}^+ R_{k(\alpha)}(\omega_m), \quad (11)$$

где $d\vec{s}_\alpha$ – векторный элемент поверхности сечения α ; $\alpha=1,2$; $k=1, 2, \dots, N$; $m=1, 2, \dots, q$, и учитывая электродинамические граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих ЭМ поля $\vec{E}_\tau(\omega_m)$, $\vec{H}_\tau(\omega_m)$ на сечениях S_1, S_2 , получаем искомые граничные условия:

$$C_{k(\alpha)}^+(\omega_m) + C_{k(\alpha)}^-(\omega_m) = a_{k(\alpha)}^t(\omega_m),$$

$$C_{k(\alpha)}^+(\omega_m) - C_{k(\alpha)}^-(\omega_m) = b_{k(\alpha)}^t(\omega_m), \quad (12)$$

$\alpha=1, 2$; $k, n=1, 2, \dots, N$; $m=0, 1, 2, \dots, q$.

Решение задачи дифракции сведено к решению системы нелинейных ОДУ (9) совместно с системами нелинейных АУ (10) с граничными условиями (12). Вычислительный алгоритм решения нелинейной краевой задачи дифракции для стационарных нелинейных уравнений (7) разработан на основе метода поперечных сечений [2]. Решение системы нелинейных АУ (10) с граничными условиями (12) получено методом «пристрелки» [4], который позволяет свести краевую задачу к серии задач Коши с варьируемыми начальными условиями относительно $C_{k(1)}^-(\omega_m)$ ($\alpha=1, 2$; $k=1, 2, \dots, N$; $m=0, 1, 2, \dots, q$).

3. Результаты решения задачи дифракции ТЕМ- волны на 2D решетках МЧ (с микро- и наноразмерами)

Решение задачи дифракции проведено без упрощения уравнений (7) и граничных условий (11) с помощью вычислительного алгоритма, разработанного методом автономных блоков с каналами Флоке и магнитными нановключениями (МФАБ) [1].

Методом МФАБ проведен электродинамический расчет элемента матрицы рассеяния $|S_{12}|$ периодических 2D решеток магнитных частиц (МЧ) (ферритовых наносфер) (рис. 1) в зависимости от нормированной частоты с учетом спектра магнитостатических (МС) и спин-волновых (СВ) колебаний в СВЧ диапазоне частот.

Результаты электродинамического расчета модуля элемента матрицы рассеяния $|S_{12}|$ TEM -волны на 2D решетках МЧ (с микро- и наноразмерами) в зависимости от нормированной частоты при изменении расстояний между МЧ (периода решетки h) приведены на рис. 2, 3.

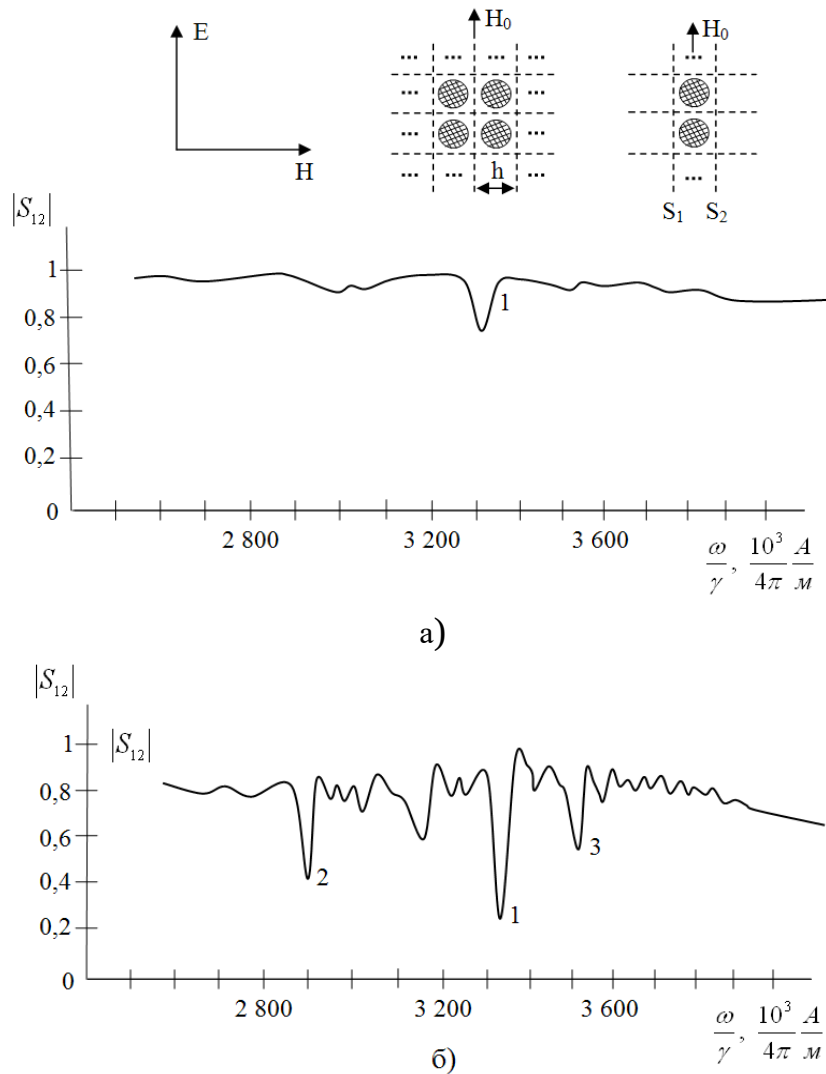


Рис. 2. Дифракция TEM -волны на 2D решетках МЧ в зависимости от нормированной частоты ω/γ при изменении расстояния h между МЧ:

$|S_{12}|$ – модуль элемента матрицы рассеяния; $R = 0,100$ мм;

$C_{1(1)}^+(\omega) = 0,01$ А / мм ; а) $h = 0,550$ мм; б) $h = 0,350$ мм; в) $h = 0,215$ мм;

г) $h = 0,210$ мм; д) $h = 0,205$ мм; е) $h = 0,202$ мм; ж) $h = 0,2005$ мм (начало)

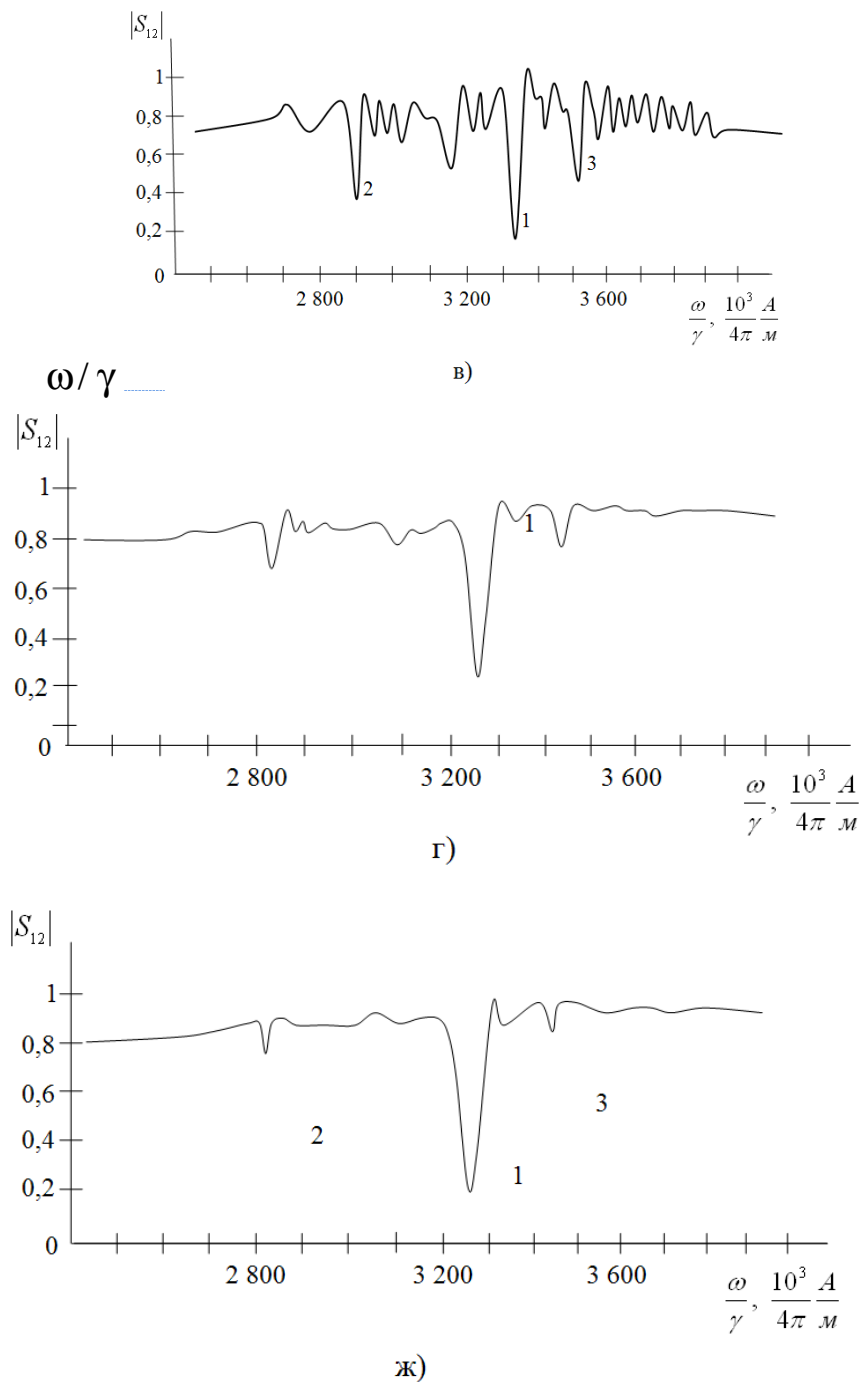


Рис. 2. Окончание

Результаты математического моделирования получены при следующих параметрах феррита: постоянное поле подмагничивания, намагниченность насыщения $M_0 = 160$ Гс, константа обменного взаимодействия $A = 3,1 \cdot 10^{-9}$ Э см², параметр диссипации $\alpha = 0,025$ [5] для на частоте $f = 9,375$ ГГц.

Модель независимых (невзаимодействующих) МЧ

На первом этапе проведено математическое моделирование дифракции на решетке МЧ (ферритовых микросфер с радиусом $R = 0,100$ мм) при изменении расстояния h между МЧ ($h = 0,55 - 0,2005$ мм).

На рис. 2,а приведены результаты электродинамического расчета модуля элемента матрицы рассеяния $|S_{12}|$ ТЕМ-волны на решетке МЧ ($R = 0,100$ мм, $h = 0,55$ мм) в зависимости от нормированной частоты падающей ЭМ волны. Зависимость $|S_{12}|$ от ω/γ при $h = 0,55$ мм имеет единственный минимум (рис. 2а), который соответствует максимуму поглощения, как и для уединенной ферритовой сферы, на собственной частоте ω_0 однородного типа МС колебаний (1,1,0) [5].

В этом случае для решетки из МЧ ($R = 0,100$ мм) при достаточно больших расстояниях между МЧ частицами $h = 0,55$ мм применима модель независимых (невзаимодействующих) частиц [5], связью между колебаниями намагниченности соседних МЧ можно пренебречь.

Модель сильно связанных МЧ.

Коллективные моды системы (решетки МЧ)

Однако при уменьшении расстояния h между МЧ колебания намагниченности в отдельных МЧ ($R = 0,100$ мм) решетки не являются независимыми. При уменьшении h ($h = 0,350 - 0,215$ мм) зависимость $|S_{12}|$ от ω/γ имеет несколько минимумов (1–3 на рис. 2б,в). Эти минимумы соответствуют максимумам поглощения на собственных частотах различных МС типов прецессии намагниченности ферритовой сферы [5]: 1 – низший однородный тип (1,1,0); 2, 3 – неоднородные типы (2,2,0) и (2, 2, 1), соответственно.

При $h = 0,350 - 0,215$ мм в решетке имеется сильная связь между МЧ, обусловленная магнитными (диполь-дипольными) силами [54]. В решетке магнитное поле, создаваемое соседними МЧ (магнитными диполями), становится существенно неоднородным в области частицы, что приводит к связи $H_0 = 3330\text{Э}$ между однородным и неоднородными МС типами прецессии намагниченности ферритовой сферы.

При дальнейшем уменьшении h ($h = 0,55 - 0,215$ мм) неоднородность (вариации) внутреннего магнитного поля существенно нарастает с масштабом изменения, определяемым периодом решетки, и происходит возбуждение все большего числа различных неоднородных МС типов с большей интенсивностью (рис. 2б,в). Спектр формирующихся при этом собственных колебаний всей системы (решетки) МЧ (коллективных мод) влияет на возникновение минимумов в частотной зависимости $|S_{12}|$ (рис. 2 б,в).

При уменьшении h до длины обменного взаимодействия ($h = 0,210 - 0,2005$ мм) минимум 1 (рис. 2 г-ж) $|S_{12}|$ возрастает, а минимумы 2,3 на частотах неоднородных типов МС колебаний прецессии намагниченности уменьшаются. Центральный пик поглощения увеличивается и расширяется в соответствии со спектром возбуждаемых «коротких» диполь-обменных СВ.

Модель связанных мод (колебаний) решетки МНЧ.

Вырождение с безобменной и обменной частями спектра СВ

Результаты математического моделирования дифракции *ТЕМ*-волны на 2D решетках МНЧ ($R = 250$ нм, $h = 3000$ нм, 750 нм и 600 нм) приведены на рис. 3 (кривые 1–3, соответственно).

При $h = 3000$ нм имеется сильная связь между МНЧ, обусловленная магнитными диполь-дипольными силами. Зависимость $|S_{12}|$ имеет несколько минимумов (кривая 1 рис. 3). Эти минимумы соответствуют собственным частотам различных МС типов колебаний [5]: центральный – однородный тип $(1,1,0)$ и неоднородные типы $(2,2,0)$, $(2,1,0)$, $(3,2,0)$, $(3,3,0)$. Положения по частоте ω (или постоянному полю подмагничивания H_0) одних и тех же минимумов при достаточно малых размерах сфер ($R = 250$ нм и $R = 0,100$ мм) от размеров МНЧ не зависят (см. минимумы на графиках рис. 2 и 3).

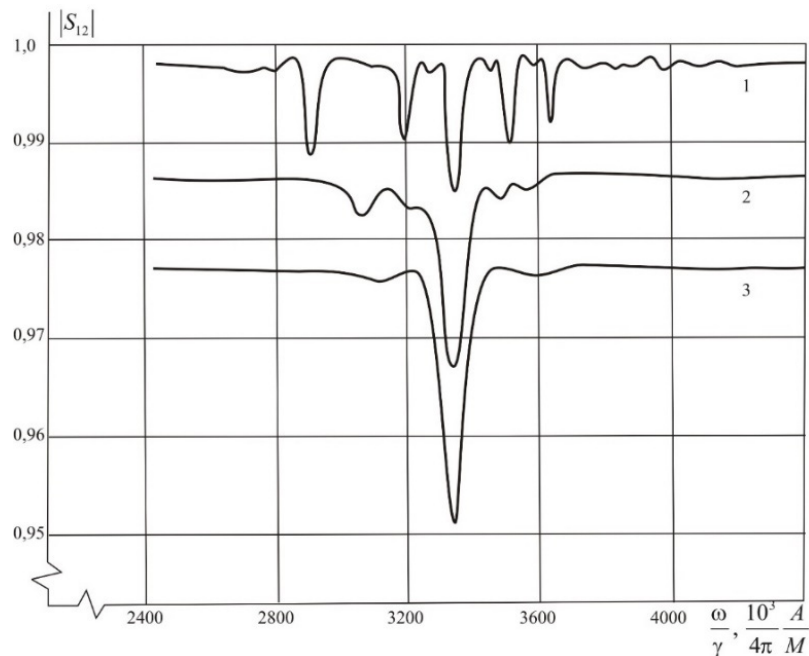


Рис. 3. Дифракция *ТЕМ*-волны на 2D решетках МНЧ в зависимости от нормированной частоты ω/γ при уменьшении расстояния h между МНЧ до длины обменного взаимодействия: $R = 250$ нм; , $M_0 = 160$ Гс; $C_{1(1)}^+(\omega) = 0,01$ А/мм ; кривая 1 – $h = 3000$ нм; 2 – $h = 750$ нм; 3 – $h = 650$ нм

При уменьшении h ($R = 250$ нм, $h = 750$ нм) центральный пик резонансного поглощения (кривые 2, 3 рис. 3) расширяется. При дальнейшем сокращении размеров МНЧ и расстояния ($h = 600$ нм) между МНЧ (переходе в масштаб длины обменного взаимодействия) спектр дипольно-обменных СВ, обусловленных эффектом обменного взаимодействия между МНЧ, играет доминирующую роль. Имеет место

механизм потерь, связанный с возбуждением СВ, вырожденных с однородной прецессией (кривые 2, 3 рис. 3).

При расстояниях между МНЧ ($h = 750$ нм, 600 нм), соизмеримых с длиной обменного взаимодействия, при наличии сильной связи между МНЧ, обусловленной обменными силами, вырождение с безобменной частью спектра СВ играет существенную роль [5]. Для случая ферритовой наносферы имеет место вырождение однородной прецессии как с неоднородными МС типами прецессии намагниченности, так и плоскими диполь-обменными СВ [5]. При дальнейшем уменьшении расстояний между МНЧ ($h = 600$ нм) до порядка длины обменного взаимодействия имеет место вырождение однородной прецессии со все большей группой плоских СВ [5], и пик поглощения уширяется (кривая 3 рис. 3).

Соавтором в части, касающейся разработки вычислительного метода и реализующего его алгоритма, являлся Голованов Олег Александрович.

Список литературы

1. Голованов О. А., Макеева Г. С. Метод автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке для математического моделирования магнитных наноструктур с учетом обмена и граничных условий // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1421–1428.
2. Свешников А. Г. Дифракция на ограниченном теле // Доклады АН СССР. 1969. Т. 184, № 1. С. 63–65.
3. Голованов О. А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноводных устройств СВЧ с нелинейными средами // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, № 9. С. 1853–1863.
4. Бахвалов Н. С. Численные методы. М. : Наука, 1975.
5. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М. : Наука, 1994.

Численный метод определения точек бифуркации нелинейного оператора Максвелла (уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау – Лифшица)

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Построен вычислительный алгоритм, реализующий численный анализ точек бифуркации нелинейного оператора Максвелла (системы уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау – Лифшица). Численный анализ точек ветвления нелинейных уравнений Максвелла проводится в предположении, что одно решение в окрестности особой точки известно и получено с помощью декомпозиционного вычислительного алгоритма, который затем «усиливается» качественным методом анализа точек ветвления. Сформулированы необходимые и достаточные условия существования точек бифуркации для собственных значений линеаризованного оператора Максвелла.

Ключевые слова: нелинейный оператор Максвелла, точки бифуркации, декомпозиционный вычислительный алгоритм, собственные значения

Numerical technique for determining the bifurcation points of the nonlinear Maxwell operator (Maxwell's equations together with the Landau-Lifshitz equation)

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia
radiotech@pnzgu.ru

Abstract. A computational algorithm is constructed that implements a numerical analysis of the bifurcation points of the nonlinear Maxwell operator (the system of Maxwell equations together with the Landau-Lifshitz equation). Numerical analysis of branch points of nonlinear Maxwell equations is carried out under the assumption that one solution in the vicinity of a singular point is known and obtained using a decomposition computational algorithm, which is then "enhanced" by a qualitative method of branch point analysis. Necessary and sufficient conditions for the existence of bifurcation points for the eigenvalues of the linearized Maxwell operator are formulated.

Keywords: nonlinear Maxwell operator, bifurcation points, decomposition computational algorithm, eigenvalues

1. Построение вычислительного алгоритма, реализующего численный анализ точек бифуркации

Анализ точек ветвления нелинейных уравнений Максвелла проводится в предположении, что одно решение в окрестности особой точки

известно [1, 2]. Для нахождения этого решения может быть использован декомпозиционный вычислительный алгоритм [3].

Однако при решении нелинейных краевых задач электродинамики с помощью традиционных вычислительных алгоритмов существует реальная возможность пропуска точек ветвления, в окрестностях которых может появиться второе решение, очень близкое к первому решению $\tilde{y}$. Поэтому вычислительный алгоритм необходимо «усилить» качественным методом анализа точек ветвления. Построим такой алгоритм, реализующий численный анализ точек бифуркации нелинейного оператора Максвелла.

В [4] показано, что решение нелинейной задачи дифракции для системы уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау – Лифшица можно свести с помощью метода поперечных сечений [5] к решению системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) совместно с системой нелинейных алгебраических уравнений (АУ).

Запишем системы нелинейных ОДУ и АУ [4] в символическом виде

$$\frac{dy_i}{dz} = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n); \quad (1)$$

$$\Psi_j(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = m + 1, m + 2, \dots, n,$$

где $y_i = y_i(z)$ – неизвестные функции продольной координаты z , составленные из функций $a_n^t(\omega_m)$, $b_n^t(\omega_m)$, $a_n^z(\omega_m)$, $b_n^z(\omega_m)$, $d_n^t(\omega_m)$, $d_n^z(\omega_m)$, полученных методом поперечных сечений [5].

Пусть $\tilde{y}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ – некоторые решения системы ДУ (1), удовлетворяющие граничным условиям [4]. Вводя замену переменных $x_i = y_i - \tilde{y}_i$, преобразуем к виду

$$\frac{dy_i}{dz} = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n); \quad (2)$$

$$\Psi_j(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0;$$

$$i = 1, 2, \dots, r; \quad j = r + 1, r + 2, \dots, n,$$

где $\Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi_i(x_1 + \tilde{y}_1, \dots, x_n + \tilde{y}_n) - \Phi_i(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)$;

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Psi_j(x_1 + \tilde{y}_1, \dots, x_n + \tilde{y}_n);$$

$$i = 1, 2, \dots, r; \quad j = r + 1, r + 2, \dots, n.$$

При $x_i = 0$ функции Φ_i и Ψ_j тождественно обращаются в нуль, следовательно, решение $x_i = 0$ системы (2) является стационарным относительно координаты z . $x_i = y_i - \tilde{y}_i$.

$$\frac{dx_i}{dz} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_i(0,0,...,0)}{\partial x_k} x_k ; \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \Psi_i(0,0,...,0)}{\partial x_k} x_k = 0; \quad i=1,2,...,r; j=r+1,r+2,...,n.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dz} = a_{11}(z)x_1 + a_{12}(z)x_2 + \dots + a_{1n}(z)x_n = x_1', \\ \frac{dx_2}{dz} = a_{21}(z)x_1 + a_{22}(z)x_2 + \dots + a_{2n}(z)x_n = x_2', \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{dx_m}{dz} = a_{m1}(z)x_1 + a_{m2}(z)x_2 + \dots + a_{mn}(z)x_n = x_m', \\ 0 = a_{m+1,1}(z)x_1 + a_{m+1,2}(z)x_2 + \dots + a_{m+1,n}(z)x_n, \\ 0 = a_{m+2,1}(z)x_1 + a_{m+2,2}(z)x_2 + \dots + a_{m+2,n}(z)x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 = a_{n1}(z)x_1 + a_{n2}(z)x_2 + \dots + a_{nn}(z)x_n, \end{array} \right. \quad (4)$$

Представим уравнения (4) в матричной форме

$$\text{где } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix} - \text{вектор-функция; } \frac{d\vec{x}}{dz} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m' \end{pmatrix},$$

16

Здесь

$$\begin{aligned}
 A_{11}(z) &= \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) & \dots & a_{1m}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) & \dots & a_{2m}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}(z) & a_{m2}(z) & \dots & a_{mm}(z) \end{pmatrix}, \\
 A_{12}(z) &= \begin{pmatrix} a_{1 \ m+1}(z) & a_{1 \ m+2}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ a_{2 \ m+1}(z) & a_{2 \ m+2}(z) & \dots & a_{2n}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m \ m+1}(z) & a_{m \ m+2}(z) & \dots & a_{mn}(z) \end{pmatrix}, \\
 A_{21}(z) &= \begin{pmatrix} a_{m+1 \ 1}(z) & a_{m+1 \ 2}(z) & \dots & a_{m+1 \ m}(z) \\ a_{m+2 \ 1}(z) & a_{m+2 \ 2}(z) & \dots & a_{m+2 \ m}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(z) & a_{n2}(z) & \dots & a_{nm}(z) \end{pmatrix}, \\
 A_{22}(z) &= \begin{pmatrix} a_{m+1 \ m+1}(z) & a_{m+1 \ m+2}(z) & \dots & a_{m+1 \ n}(z) \\ a_{m+2 \ m+1}(z) & a_{m+2 \ m+2}(z) & \dots & a_{m+2 \ n}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(z) & a_{n2}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что функция $x_i = y_i - \tilde{y}_i$ – это разность между неизвестным решением y_i и известным решением (система нелинейных ДУ (3) линеаризована в окрестности $\tilde{y}_i$). Функция $\tilde{y}_i$ – это решение, полученное традиционным вычислительным методом, например, методом поперечных сечений [5] на основе декомпозиционного подхода с использованием метода автономных блоков с каналами Флоке (ФАБ) [6].

Система линейных ОДУ (4) имеет тривиальное решение $x_i = 0$ ($y_i - \tilde{y}_i = 0$). Необходимо определить нетривиальные решения системы ДУ (4). Если такие решения существуют, то значения параметров $(\dot{C}_{k(\alpha)}^+(\omega_m)$ и т.д.) определяют точки ветвления.

2. Необходимые и достаточные условия существования точек бифуркации

Решение системы линейных ДУ (4) будем искать в виде ряда Фурье

$$\bar{x} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \bar{a}_p \exp(i \frac{2\pi p}{l} z), \Psi_j \quad (6)$$

где $\vec{\alpha}_p = \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \alpha_{2p} \\ \vdots \\ \alpha_{mp} \end{pmatrix}$; $\alpha_{1p}, \alpha_{2p}, \dots, \alpha_{mp}$ – неизвестные коэффициенты; l – про-

дольный размер нелинейной неоднородности, расположенной в ВС между сечениями $z = 0, z = l$.)

Вектор-функция $\vec{x}(z)$ в (6) удовлетворяет граничным условиям $\vec{x}(0) = \vec{x}(l)$, которые выполняются лишь в окрестности точки ветвления, где $\vec{x} = \vec{y} - \vec{\tilde{y}}$ приближенно определяется нулевым членом ряда Тейлора.

Подставляя (63.17) в (53.16), получим следующее матричное уравнение:

$$\mathbf{A}(z)\vec{\alpha}_p = i \frac{2\pi p}{l} \vec{\alpha}_p, \quad (7)$$

где $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$.

Если система линейных ДУ (5) имеет отличное от нуля решение, то собственные значения λ матрицы $\mathbf{A}(z)$ (хотя бы одно) для любого z из $[0, l]$ совпадают с $i2\pi p / l$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) [1]. Однако обратное не всегда справедливо: матрица $\mathbf{A}(z)$ для любого z из $[0, l]$ может иметь собственные значения λ , совпадающие с $i2\pi p / l$, но точки ветвления могут и не существовать [1].

Численный анализ поведения решения вблизи точки ветвления проводят в предположении, что одно решение $\tilde{y}_i$ в окрестности точки известно. В отличие от определения точки ветвления в определении точки бифуркации [1] априори предполагают известным одно из семейств решений $\tilde{y}_i (i = 1, 2, \dots, n)$, определённых при всех значениях параметра счета (речь идет об ответвлении решения y_i от заданного семейства $\tilde{y}_i (i = 1, 2, \dots, n)$).

Необходимым условием существования точек ветвления (точек бифуркации) является совпадение собственных значений λ матрицы $\mathbf{A}(z)$ с $i2\pi p / l$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) для любого z из $[0, l]$ [1].

Достаточное условие существования точек бифуркации получены в [1] топологическим методом. Это условие может быть сформулировано следующим образом: каждое нечётнократное, в частности простое, собственное значение λ матрицы $\mathbf{A}(z)$ для любого z из $[0, l]$, совпадающее с $i2\pi p / l$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$), является точкой ветвления (точкой бифуркации).

Соавтором в части, касающейся разработки вычислительного метода и реализующего его алгоритма, являлся Голованов Олег Александрович.

Список литературы

1. Красносельский М. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1964.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М. : Наука, 1969.
3. Голованов О. А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноведущих устройств СВЧ с нелинейными средами // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, № 9. С. 1853–1863.
4. Макеева Г. С., Голованов О. А. Электродинамический анализ взаимодействия электромагнитных волн с нелинейными гиромагнитными включениями в волноведущих структурах // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 3. С. 261–267.
5. Свешников А. Г. Дифракция на ограниченном теле // Доклады АН СССР. 1969. Т. 184, № 1. С. 63–65.
6. Голованов О. А., Макеева Г. С. Метод автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке для математического моделирования магнитных наноструктур с учетом обмена и граничных условий // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1421–1428.

Анализ параметрической неустойчивости волн в магнитных нанорешетках по точкам бифуркации нелинейного оператора Максвелла

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Развивается методика исследования параметрических неустойчивостей в магнитных наноструктурах с помощью разработанного вычислительного алгоритма определения точек бифуркации нелинейного оператора Максвелла. Численно исследована неустойчивость процесса параметрического возбуждения магнитостатических и спиновых волн (колебаний) в 2D-решетках магнитных наночастиц (МНЧ) в зависимости от значения бифуркационных параметров: амплитуды волны накачки и частоты. Рассчитаны пороговые значения параметрической неустойчивости магнитостатических и спиновых колебаний в 2D-решетках МНЧ (с микро- и наноразмерами) в зависимости от расстояния между МНЧ (периода решетки).

Ключевые слова: точки бифуркации, собственные числа, параметрические неустойчивости, пороговые значения, амплитуда волны накачки

Analysis of the parametric instability of waves in magnetic nanogratings on the bifurcation points of the nonlinear Maxwell operator

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia
radiotech@pnzgu.ru

Abstract. A technique for studying parametric instabilities in magnetic nanostructures is being developed using the developed computational algorithm for determining the bifurcation points of the nonlinear Maxwell operator. The instability of the process of parametric excitation of magnetostatic and spin waves (oscillations) in 2D gratings of magnetic nanoparticles (MNPs) is numerically studied as a function of the bifurcation parameters: pump wave amplitude and frequency. The threshold values of the parametric instability of magnetostatic and spin oscillations in grating of MNPs (with micro- and nanosizes) are calculated depending on the distance between MNPs (grating period).

Keywords: bifurcation points, eigenvalues, parametric instabilities, threshold values, pump wave amplitude

1. Вычисление собственных значений и собственных функций линеаризованного оператора Максвелла

Систему нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ) совместно с системой нелинейных алгебраических уравнений (АУ),

к решению которых сводится решение нелинейной задачи дифракции для системы уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау-Лифшица [1], запишем в символическом виде:

$$\begin{aligned}\frac{dy_i}{dz} &= F_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \Psi_j(y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0; \\ i &= 1, 2, \dots, m; \quad j = m+1, m+2, \dots, n,\end{aligned}\tag{1}$$

где $y_i = y_i(z)$ – неизвестные функции продольной координаты z , составленные из функций $a_n^t(\omega_m)$, $b_n^t(\omega_m)$, $a_n^z(\omega_m)$, $b_n^z(\omega_m)$, $n_n^z(\omega_m)$, полученных методом поперечных сечений [2].

При $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) функции F_i и Ψ_j ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = m+1, m+2, \dots, n$) тождественно обращаются в нуль, следовательно, решение $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (1) является неподвижным (стационарным) относительно продольной координаты z .

Линеаризуем систему нелинейных ДУ (13.18), заменив ее системой линейных ДУ первого приближения. Для этого необходимо функции F_i и Ψ_j разложить в обобщенный ряд Тейлора в окрестности точки $y_i = 0$ и учесть частные производные до первого порядка включительно. Тогда полученная система линейных ДУ имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dy_i}{dz} &= \sum_{K=1}^n \frac{\partial F_i(0, 0, \dots, 0)}{\partial y_K} \cdot y_K; \\ \sum_{K=1}^n \frac{\partial \Psi_j(0, 0, \dots, 0)}{\partial y_K} \cdot y_K &= 0; \\ i &= 1, 2, \dots, m; \quad j = m+1, m+2, \dots, n.\end{aligned}\tag{2}$$

Запишем систему ДУ (2) в развернутом виде

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}(z) \cdot y_1 + a_{12}(z) \cdot y_2 + \dots + a_{1n}(z) \cdot y_n = y_1', \\ a_{21}(z) \cdot y_1 + a_{22}(z) \cdot y_2 + \dots + a_{2n}(z) \cdot y_n = y_2', \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}(z) \cdot y_1 + a_{m2}(z) \cdot y_2 + \dots + a_{mn}(z) \cdot y_n = y_m', \\ a_{m+1,1}(z) \cdot y_1 + a_{m+1,2}(z) \cdot y_2 + \dots + a_{m+1,n}(z) \cdot y_n = 0, \\ a_{m+2,1}(z) \cdot y_1 + a_{m+2,2}(z) \cdot y_2 + \dots + a_{m+2,n}(z) \cdot y_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}(z) \cdot y_1 + a_{n2}(z) \cdot y_2 + \dots + a_{nn}(z) \cdot y_n = 0, \end{array} \right.\tag{3}$$

где коэффициенты $a_{ij}(z)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) составлены из частных производных в (2).

Исключая неизвестные $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$, запишем систему линейных ДУ (3) в матричной форме

$$A(z)\vec{y} = \frac{d\vec{y}}{dz}, \quad (4)$$

Где $\vec{y}, \frac{d\vec{y}}{dz}$ – вектор-функции с компонентами, соответственно,

$y_1, y_2, \dots, y_m$ и $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$; $A(z) = A_{11}(z) - A_{12}(z)A_{22}^{-1}(z)A_{21}(z)$.

Здесь

$$A_{11}(z) = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) & \dots & a_{1m}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) & \dots & a_{2m}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}(z) & a_{m2}(z) & \dots & a_{mm}(z) \end{pmatrix},$$

$$A_{12}(z) = \begin{pmatrix} a_{1 \ m+1}(z) & a_{1 \ m+2}(z) & \dots & a_{1n}(z) \\ a_{2 \ m+1}(z) & a_{2 \ m+2}(z) & \dots & a_{2n}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m \ m+1}(z) & a_{m \ m+2}(z) & \dots & a_{mn}(z) \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(z) = \begin{pmatrix} a_{m+1 \ 1}(z) & a_{m+1 \ 2}(z) & \dots & a_{m+1 \ m}(z) \\ a_{m+2 \ 1}(z) & a_{m+2 \ 2}(z) & \dots & a_{m+2 \ m}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(z) & a_{n2}(z) & \dots & a_{nm}(z) \end{pmatrix},$$

$$A_{22}(z) = \begin{pmatrix} a_{m+1 \ m+1}(z) & a_{m+1 \ m+2}(z) & \dots & a_{m+1 \ n}(z) \\ a_{m+2 \ m+1}(z) & a_{m+2 \ m+2}(z) & \dots & a_{m+2 \ n}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(z) & a_{n2}(z) & \dots & a_{nn}(z) \end{pmatrix}.$$

Частные решения системы линейных ДУ (4) будем искать в виде

$$y_m = \alpha_m \cdot \exp \lambda_m z \quad (5)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – компоненты вектора $\vec{\alpha}$.

Подставляя (53.10) в (43.9), получаем матричное уравнение:

$$A \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\alpha}, \quad (6)$$

из которого следует, что λ и $\vec{\alpha}$ являются, соответственно, собственными числами и собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$ (т.е. собственными значениями и собственными функциями линеаризованного оператора Максвелла).

Решая уравнение (6) численным методом (QR-алгоритм) [3], находим собственные числа λ_m и собственные векторы $\vec{\alpha}$ матрицы $\mathbf{A}$. Собственные числа λ_m являются постоянными распространения «слабонелинейных» волн. Собственные векторы $\vec{\alpha}$ являются численными аналогами поперечных и продольных компонентов электромагнитных полей «слабонелинейных» волн, зависящих от геометрии электродинамической волноведущей структуры. Значения $1/\lambda_m$ определяют точки бифуркации μ нелинейного оператора Максвелла [4].

Методика исследования неустойчивостей в электродинамических резонаторных структурах с распределенными включениями нелинейных сред аналогична [5]. Собственные числа ω_m резонаторной краевой задачи являются собственными частотами «слабонелинейных» колебаний. Значения $1/\omega_m$ определяют точки бифуркации μ нелинейного оператора Максвелла. Компоненты собственных векторов $\vec{\alpha}$ являются компонентами электромагнитных полей «слабонелинейных» колебаний, зависящих от геометрии резонаторной структуры.

В отличие от известных теорий неустойчивости СВ в данной работе электромагнитные поля в электродинамических волноведущих и резонаторных структурах, содержащих включения нелинейных сред, представляются в виде разложения в ряд по «слабонелинейным» волнам («слабонелинейным» колебаниям), которые удовлетворяют электродинамическим граничным условиям, и, следовательно, образуют полную систему собственных функций рассматриваемой задачи.

Согласно критерию Ляпунова [6], если действительные части комплексных собственных чисел λ_m матрицы $\mathbf{A}$ отрицательны, то решения системы ДУ (4) асимптотически устойчивы. Если действительные части (хотя бы одно) комплексных собственных чисел λ_m матрицы $\mathbf{A}$ положительны, то решения системы ДУ (4) являются неустойчивыми. Изменение знака действительной части комплексных собственных чисел λ_m происходит в окрестностях точек бифуркации. Поэтому для того, чтобы провести бифуркационный анализ возникновения неустойчивостей в нелинейных включениях в электродинамических структурах, необходимо найти точки бифуркации нелинейного оператора Максвелла с помощью специального вычислительного алгоритма и проследить за изменением точек бифуркации и решений при изменении параметров.

2. Результаты расчета пороговых значений параметрической неустойчивости волн в решетках магнитных наночастиц по точкам бифуркации нелинейного оператора Максвелла

С помощью вычислительного алгоритма определения точек бифуркации нелинейного оператора Максвелла численно исследована неустойчивость процесса параметрического возбуждения магнитостатических волн (МСВ) и спиновых волн (СВ) (колебаний) в решетках магнитных наночастиц (МНЧ) в зависимости от значения бифуркационных параметров: амплитуды электромагнитной волны накачки $C_{1(1)}^+(\omega_H)$ и частоты ω .

Рассчитаны пороговые значения амплитуды $C_{2(1)}^+(\omega_2)$ волны накачки, при которых начинаются нелинейные процессы и возникает параметрическое возбуждение диполь-дипольных МСВ, а также дипольно-обменных СВ (колебаний) в решетках МНЧ (с микро- и наноразмерами) в зависимости от расстояния h между МНЧ (периода решетки).

Пороговые значения амплитуды $C_{1(1)}^+(\omega_H)$ падающей электромагнитной волны вычислялись с помощью разработанного алгоритма по точкам бифуркации нелинейного оператора Максвелла совместно с уравнением Ландау-Лифшица (с учетом обменного взаимодействия).

Результаты электродинамического расчета пороговых амплитуд $C_{1(1)}^+(\omega_H)$ параметрической неустойчивости МСВ и СВ (колебаний) в решетках МЧ с микроразмерами ($R = 0,100$ мм) при изменении расстояния h между МЧ от микро- до нанометров приведены на рис. 1, 2.

При $h = 0,55$ мм область неустойчивости (кривая 1 рис. 1 3.5) возникает только на частоте волны СВЧ сигнала $f_0 = 9,330$ ГГц при параметрическом возбуждении однородного типа прецессии намагниченности ферритовой сферы.

При уменьшении расстояния h между МНЧ $h = 0,35 - 0,215$ мм области неустойчивости возникают на частотах f_0 , соответствующих собственным частотам различных типов прецессии намагниченности ферритовой сферы (1 – $f_0 = 9,330$ ГГц однородного типа прецессии с индексами (1,1,0); 2 – $f_0 = 8,125$ ГГц; 3 – $f_0 = 9,946$ ГГц – неоднородных типов прецессии с индексами (2,2,0) и (2,2,1) [7], соответственно) (кривые 2,3 рис. 1). При этом пороги нелинейности понижаются из-за все большей интенсивности возбуждения коллективных магнитостатических мод.

При дальнейшем уменьшении расстояния ($h = 0,210 - 0,2005$ мм) между МЧ до порядка длины обменного взаимодействия на частоте волны СВЧ сигнала $f_0 = 9,330$ ГГц области неустойчивости (рис. 2) возникают при параметрическом возбуждении «коротких» дипольно-обменных СВ из-за эффекта обменного взаимодействия.

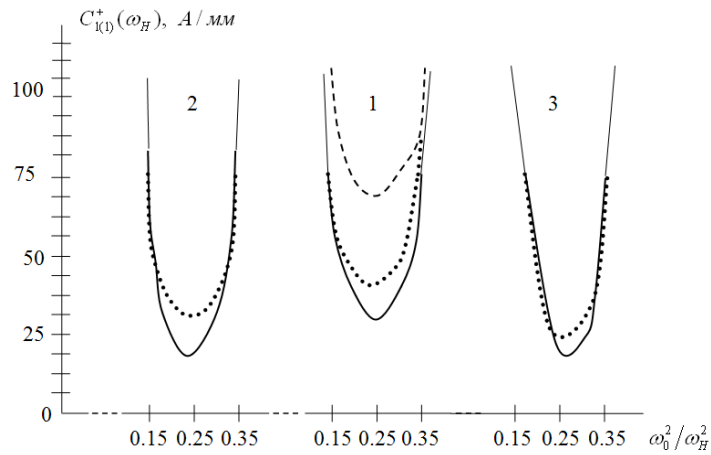


Рис. 1. Пороговые значения параметрической неустойчивости магнитостатических колебаний в магнитных 2D решетках (ферритовых микросфер) при различных расстояниях h между МЧ: — — — $h = 0,550$ мм; $h = 0,35$ мм; — $h = 0,215$ мм; $R = 0,100$ мм; $C_{1(1)}^+(\omega_H)$ — амплитуда волны накачки;

ω_0 — частота волны СВЧ сигнала;
 1 — $f_0 = 9,330$ ГГц; 2 — $8,125$ ГГц;
 3 — $9,946$ ГГц; ω_H — частота волны накачки

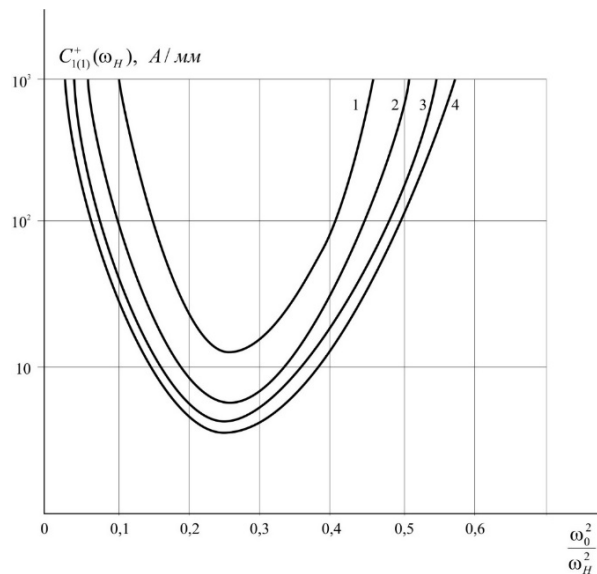


Рис. 2. Пороговые значения параметрической неустойчивости магнитостатических и спиновых колебаний в магнитных 2D решетках МЧ (ферритовых микросфер) при уменьшении расстояния h между МЧ до длины обменного взаимодействия: кривая 1 — $h = 0,210$ мм, 2 — $h = 0,205$ мм, 3 — $h = 0,202$ мм, 4 — $h = 0,2005$ мм; $R = 0,1$ мм; $C_{1(1)}^+(\omega_H)$ — амплитуда волны накачки;

ω_0 — частота волны СВЧ сигнала, $f_0 = 9,330$ ГГц ; ω_H — частота волны накачки

Результаты электродинамического расчета областей неустойчивости при параметрическом возбуждении МСВ и дипольно-обменных СВ (колебаний) в решетках магнитных МНЧ (радиус наносфер $R = 250$ нм)

в зависимости от амплитуды $C_{1(1)}^+(\omega_H)$ падающей электромагнитной волны накачки и нормированной частоты ω_0^2/ω_H^2 (ω_0 – частота волны СВЧ сигнала, ω_H – частота волны накачки) для различных расстояний h между МНЧ приведены на рис. 3.

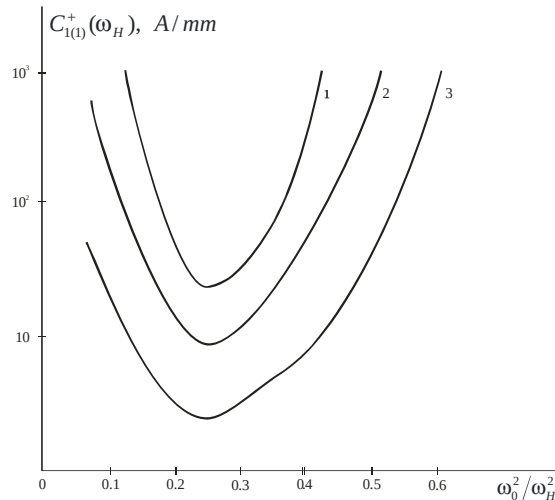


Рис. 3. Пороги параметрической неустойчивости магнитостатических и спиновых колебаний в магнитных 2D нанорешетках МЧ при уменьшении расстояния h между МНЧ до длины обменного взаимодействия: кривая 1 – $h = 3000$ нм; 2 – $h = 750$ нм; 3 – $h = 650$ нм; $R = 250$ нм; $C_{1(1)}^+(\omega_H)$ – амплитуда волны накачки; $\omega_0 = 2\pi f_0$ – частота волны СВЧ сигнала, $f_0 = 9,330$ ГГц; ω_H – частота волны накачки

Качественный анализ устойчивости полученных численных решений проводился в соответствии с критерием Ляпунова [7].

Кривые (рис. 3) разделяют неустойчивый режим параметрического возбуждения магнитных колебаний в нанорешетках от устойчивого режима. При переходе через бифуркационные значения параметра в точках бифуркации происходят скачкообразные переходы исследуемой системы (решетки) МНЧ в режим параметрического возбуждения собственных магнитных колебаний решетки (коллективных мод). Если амплитуда $C_{1(1)}^+(\omega_H)$ волны накачки превышает определенное пороговое значение, то возникает параметрическое возбуждение различных коллективных мод системы (решетки) МНЧ, зависящих от расстояния h между МНЧ.

На частоте волны СВЧ сигнала $f_0 = 9,330$ ГГц, соответствующей собственной частоте однородного типа прецессии намагниченности МНЧ (ферритовой сферы) [7], при расстояниях между МНЧ $h=3000$ нм область неустойчивости (кривая 1 рис. 3) возникает при параметрическом возбуждении магнитостатических мод, обусловленных магнитным диполь-дипольным взаимодействием между МНЧ.

При уменьшении расстояния h между наносферами ($h = 750$ нм, 600 нм) области неустойчивости при параметрическом возбуждении дипольно-обменных СВ, вырожденных с однородной прецессией [7], расширяются, и пороги параметрической неустойчивости в магнитных нанорешетках понижаются (кривые 2, 3 рис. 3).

Из результатов математического моделирования областей неустойчивости (рис. 1–3) следует, что порог нелинейности магнитных нанорешеток зависит от размеров МЧ и расстояний между МЧ (периода решетки). Порог параметрической неустойчивости в магнитных нанорешетках понижается в условиях параметрического возбуждения «коротких» дипольно-обменных СВ (колебаний) в сравнении с возбуждением диполь-дипольных МСВ (колебаний) при уменьшении размеров МНЧ (от микро- к нанообласти), а также при сокращении расстояния между МНЧ до длины обменного взаимодействия.

Разработанная методика математического моделирования нелинейных взаимодействий электромагнитных волн с магнитными нанорешетками на основе бифуркационного анализа явлений, связанных с параметрической неустойчивостью (параметрическое возбуждение коллективных магнитостатических мод и дипольно-обменных СВ), по точкам бифуркации нелинейного оператора Максвелла открывает возможности численного анализа нелинейной динамики коллективных магнитостатических и дипольно-обменных СВ мод в решетках магнитных наночастиц и нанопроволок различной геометрии.

Соавтором в части, касающейся разработки вычислительного метода и реализующего его алгоритма, являлся Голованов Олег Александрович.

Список литературы

1. Макеева Г. С., Голованов О. А. Электродинамический анализ взаимодействия электромагнитных волн с нелинейными гиромангнитными включениями в волноведущих структурах // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 3. С. 261–267.
2. Свешников А. Г. Дифракция на ограниченном теле // Доклады АН СССР. 1969. Т. 184, № 1. С. 63–65.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. М. : Наука, 1975.
4. Красносельский М. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1964.
5. Makeeva G. S., Golovanov O. A. Pardavi-Horvath M. Mathematical Modeling of Nonlinear Waves and Oscillations in Gyromagnetic Structures by means of Bifurcation Theory Methods // J. Electromagnetic Waves and Applications (JEMWA). 2006. Vol. 20, № 1. P. 1503–1510.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М. ; Л., 1950. (reprint of original thesis, 1892).
7. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М. : Наука, 1994.

**Об одной нелинейной обратной краевой задаче
для интегро-дифференциального линеаризованного
уравнения Буссинеска шестого порядка
с дополнительным интегральным условием**

**Араз Саламулла оглы Фараджев¹,
Яшар Топуш оглы Мегралиев²**

¹Азербайджанский государственный педагогический
университет, Баку, Азербайджан

²Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
¹a.farajov@mail.ru, ²yashar_aze@mail.ru

Аннотация. Огромное количество математических моделей называют уравнениями типа Буссинеска, поэтому широкий круг уравнений типа Буссинеска шестого порядка привлекает внимание исследователей всего мира. В работе изучается классическое решение одной нелинейной обратной краевой задачи для интегро-дифференциального линеаризованного уравнения Буссинеска шестого порядка с дополнительным интегральным условием. Один метод основан на применении метода Фурье. Второй метод заключается в применении метода сжатых отображений.

Ключевые слова: обратная краевая задача, классическое решение, метод Фурье, уравнения Буссинеска шестого порядка

**On one nonlinear inverse boundary value problem for
integro-differential linearized Boussinesq equation of the sixth
order with an additional integral condition**

Araz Salamulla Farajov¹, Yashar Topush Megraliyev²

¹Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan

²Baku State University, Baku, Azerbaijan
¹a.farajov@mail.ru, ²yashar_aze@mail.ru

Abstract. A huge number of mathematical models are called Boussinesq-type equations, therefore a wide range of sixth-order Boussinesq-type equations attracts a lot of attention from outside researchers around the world. The paper studies the classical solution of one nonlinear inverse boundary value problem for the integro-differential linearized Boussinesq equation of the sixth order with an additional integral condition. One method is based on the application of the Fourier method. The second method is to apply the method of compressed mappings.

Keywords: inverse boundary value problem, classical solution, Fourier method, sixth-order Boussinesq equations

Введение. Постановка задачи. Уравнение Буссинеска – это классическая модель для описания распространения волн малой амплитуды и длинных волн. В последнее время большое внимание уделяется изучению уравнения Буссинеска шестого порядка [1–9]. Обратные задачи различного рода для краевых задач для уравнений типа Буссинеска шестого порядка впервые были изучены авторами и некоторые из них опубликованы в работах [10–15]. В отличие от предыдущих работ в данной статье рассматривается совершенно новая обратная задача для интегро-дифференциального линеаризованного уравнения Буссинеска шестого порядка с дополнительным интегральным условием.

При рассмотрении процессов распространения электромагнитных, акустических и упругих волн необходимо учитывать предысторию процесса. Для электромагнитных волн это связано с явлением дисперсии волн, а для акустических и упругих волн – с наличием вязкости среды. С математической точки зрения эти свойства среды в дифференциальных уравнениях учитываются интегральным слагаемым типа оператора свертки с ядром, которое описывает явление «предыстории среды» или «памяти среды». Определение ядра интегрального оператора по наблюдаемой информации о решениях соответствующих уравнений представляет собой интенсивно развивающееся направление теории обратных задач. Ядро может зависеть от временной и пространственных переменных.

Пусть $D_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T\}$. Далее, пусть $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$, $h(t)$ – заданные функции, определенные при $x \in [0, 1]$. Рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти пару $\{u(x, t), a(t)\}$ функций $u(x, t)$, $a(t)$ удовлетворяющих уравнению

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + \beta_1 u_{xxxx}(x, t) - \beta_2 u_{xxxxx}(x, t) = \\ = \int_0^t a(\tau) u(x, t - \tau) d\tau + f(x, t) \quad (x, t) \in D_T, \end{aligned} \quad (1)$$

начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, t) = u_x(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) = u_{xxxx}(0, t) = \\ = u_{xxxxx}(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (3)$$

и с дополнительным интегральным условием

$$\int_0^1 g(x) u(x, t) dx = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

где $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ – фиксированные числа.

Введем обозначение:

$$C^{6,2}(D_T) = \{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{xxxxx}(x,t) \in C(D_T)\}.$$

Определение. Пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t) \in C^{6,2}(D_T) \cap C^{5,1}(\bar{D}_T)$ и $a(t) \in C[0, T]$ удовлетворяющих уравнению (1) в D_T , условию (2) в $[0, 1]$ и условиям (3)-(4) в $[0, T]$, назовем классическим решением обратной краевой задачи (1)–(4),

$$C^{5,1}(\bar{D}_T) = \{u(x,t) : u(x,t), u_t(x,t), u_{xxxx}(x,t) \in C(\bar{D}_T)\}$$

Для исследования задачи (1)–(4) рассмотрим уравнение

$$y''(t) = \int_0^t a(\tau) y(t - \tau) d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

с условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (6)$$

где $a(t) \in C[0, T]$ – заданная функция, $y = y(t)$ – искомая функция, причем функция $y(t)$ называется решением краевой задачи (5), (6), если $y(t) \in C^2[0, T]$ и удовлетворяют условиями (5), (6) в обычном смысле.

Теорема о разрешимости задачи.

Предположим, что данные задачи (1)–(3), (5) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^6[0, 1]$, $\varphi^{(7)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = \varphi''(0) = \varphi'''(1) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(5)}(1) = \varphi^{(6)}(0) = 0$.
2. $\psi(x) \in C^3[0, 1]$, $\psi^{(4)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\psi(0) = \psi'(1) = \psi''(0) = \psi'''(1) = 0$.
3. $f(x, t), f_x(x, t), f_t(x, t), f_{xx}(x, t), f_{xxx}(x, t) \in C(D_T)$, $f_{xxxx}(x, t) \in L_2(D_T)$, $f(0, t) = f_x(1, t) = f_{xx}(0, t) = f_{xxx}(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$.
4. $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$, $g(x) \in C^3[0, 1]$, $g(0) = g'(1) = g''(0) = 0$, $h(t) \in C^3[0, T]$, $h(0) \neq 0$.

С помощью метода Фурье и сжимающих отображений доказано следующая

Теорема. Пусть выполнены условия 1–4 и

$$(A(T) + 2)((A(T) + 2)B(T) + C(T)) < 1$$

$$h''(0) + \int_0^1 (\beta_2 g'''(x) - \beta_1 g'(x)) \varphi'''(x) dx - \int_0^1 g(x) f(x, 0) dx = 0 \text{ и}$$

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = h(0), \int_0^1 g(x)\psi(x)dx = h'(0),$$

$$\frac{1}{2}(A(T) + 2)T^3 < 1.$$

Тогда задача (1)–(4) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^7} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^7 единственное классическое решение.

Список литературы

1. Wang Y. Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation // Elec. J. Di. Eqn., 2016. Vol. 64. P. 1–16.
2. Xu R., Liu Y., Liu B. The Cauchy problem for a class of the multidimensional Boussinesq type equation // Nonlinear Anal. 2011. Vol. 74. P. 2425–2437.
3. Фараджев А. С. Задача для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией и нелокальными интегральными условиями // Proceedings of IAM. 2021. Т. 10, № 2. С. 135–148.
4. Фараджев А. С. Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения с частными производными шестого порядка с нелокальными условиями // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVI Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза 1–4 декабря 2021 г.). Пенза, 2021. С. 57–63. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47702594>
5. Polat N., Erta A. Existence and blow up of solution of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation // J. Math. Anal. Appl. 2009. Vol. 349. P. 10–20.
6. Lin Q., Wu Y. H. Loxton R. On the Cauchy problem for a generalized Boussinesq equation // J. Math. Anal. Appl. 2009. Vol. 353. P. 186–195.
7. Esfahani A., Farah L. Local well-posedness for the sixth-order Boussinesq equation // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 385 P. 230–242.
8. Wang Y. Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation // Elec. J. Di. Eqn. 2016. Vol. 64. P. 1–16.
9. Wang H. W., Esfahani A. Global rough solutions to the sixth-order Boussinesq equation // Nonlinear Anal.-Theor. 2014. Vol. 102. P. 97–104.
10. Мегралиев Я. Т., Фараджев А. С. О разрешимости обратной краевой задачи для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Махачкала, 2021. С. 156–158.
11. Фараджев А. С. Мегралиев Я. Т. Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени коэффициентов и источника в уравнении движения волн с поверхностным напряжением // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XVI Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов Россия (г. Пенза, 1–4 июня 2022 г.). Пенза, 2022. С. 25–30.

12. Farajov A. S. On a solvability of the nonlinear inverse boundary value problem for the boussinesq equation // Advanced Mathematical Models & Applications. 2022. Vol. 7, № 2. P. 241–248.
13. Фараджев А. С. Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения Буссинеска шестого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода // Прикладная математика & Физика. 2022. Т. 54, № 3. С. 141–153.
14. Фараджев А. С. Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения с частными производными шестого порядка с дополнительными интегральными условиями // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.). Пенза, 2022. С. 75–78.
15. Farajov A. S. The inverse problem of simultaneous determination two time-dependent coefficients in the equation of motion of waves with surface stress. Tran. // Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mechanics. 2022. Vol. 42 (8). P. 36–46.

Bounded and unbounded solutions of the system of Cauchy-type singular integral equations of the first kind by hybrid method

**Zaynidin Eshkuvatov¹, Husnida Mamatova²,
Shaxrina Ismail³, Abdula Wahab⁴**

^{1,2,4}University Malaysia Terengganu, Kuala Terengganu, Malaysia

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

³University Sains Islam Malaysia, Negeri Sembilan, Malaysia

¹zainidin@umt.edu.my, ²p4883@pps.umt.edu.my,

³shahrinaismail@usim.edu.my, ⁴fatah@umt.edu.my

Abstract. In this article, the system of Cauchy-type singular integral equations (CSIEs) of the first kind with constant coefficients and its bounded and unbounded solutions are considered. To solve the system of CSIEs, the hybrid method (combination of homotopy perturbation method (HPM) and Gauss elimination method) are developed as the semi-analytical method. Before applying HPM, first, we have to reduce the system of CSIEs into a triangle system of algebraic equations using the Gauss elimination method, then we carried out HPM. Using the theory of the bounded and unbounded solutions of characteristic CSIEs, we are able to find inverse operator for system of CSIEs of the first kind. For each of the bounded and unbounded cases, two examples are provided and examined to demonstrate the proposed method validity and accuracy. Obtained results are compared with the Chebyshev collocation method given in ([1]). Numerical results revealed that hybrid method is dominated Chebyshev collocation method.

Keywords: hybrid method, System of singular integral equations, Gauss elimination method, semi-analytical method

Acknowledgments: this work is part of a research project, UMT/CRIM/2-2/2/14 Jld. 4(44), Project code: TAPE-RG-55233. The authors are grateful for the support of the work by the Research Grant Scheme, University Malaysia Terengganu.

Ограниченные и неограниченные решения системы сингулярных интегральных уравнений типа Коши первого рода гибридным методом

**Зайнидин Ешкуватов¹, Хуснида Маматова²,
Шахрина Исмаил³, Абдула Вахаб⁴**

^{1,2,4}Университет Малайзии Теренггану, Куала-Теренггану, Малазия

¹Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан

³Исламский научный университет Малайзии, Негри-Сембилан, Малазия

Аннотация. Рассматривается система сингулярных интегральных уравнений типа Коши (CSIEs) первого рода с постоянными коэффициентами и ее ограниченные и неограниченные решения. Для решения системы CSIEs в качестве полуаналитического метода разработан гибридный метод (комбинация метода гомотопических возмущений (HPM) и метода исключения Гаусса). Прежде чем применять HPM, сначала мы должны свести систему CSIEs к треугольной системе алгебраических уравнений, используя метод исключения Гаусса. Используя теорию ограниченных и неограниченных решений свойств CSIEs, мы можем найти обратный оператор для системы CSIEs первого рода. Для каждого из ограниченных и неограниченных случаев приводятся и исследуются два примера, демонстрирующие однозначную разрешимость и точность предлагаемого метода. Полученные результаты сравниваются с результатами метода коллокации по узлам полиномов Чебышева. Численные результаты показали, что гибридный метод доминирует над методом коллокации по узлам полиномов Чебышева.

Ключевые слова: гибридный метод, система сингулярных интегральных уравнений, метод исключения Гаусса, полуаналитический метод

Благодарность: эта работа является частью исследовательского проекта UMT/CRIM/2-2/2/14 Jld. 4(44), код проекта: TAPE-RG-55233. Авторы благодарны за поддержку работы по программе исследовательских грантов Университет Малайзии Теренггану.

INTRODUCTION

The solution of a large class of boundary value problems in physics and engineering can be reduced to the solution of systems of singular integral equations. The general theory on this topic has been developed in the fundamental books [2–5]. Furthermore, in the development of direct methods, indirect methods and polynomial approximation methods (Galerkin, collocation and quadrature methods), can be found in very wide literature concerning the numerical solution of a Cauchy singular integral equations (CSIEs) especially in the case of equations having constant coefficients and index 0 or 1 (bounded and unbounded) [6–8] and literature cited therein. Nevertheless, the case of equations having negative index -1 (semi bounded case) has not been so much elaborated [10–11] till now. In such a case, the application of a direct method leads to solve an overdetermined linear system and a difficulty arises in choosing the equation to be neglected. There are few literatures on solving system of SIEs [1], [12–15].

The homotopy perturbation method (HPM) is the one of the vital tools for solving linear and nonlinear problems in various areas of science and technological fields. In 1999, Ji-Huan He [16] proposed the HPM and applied it to various kinds of nonlinear problems [17], linear and nonlinear Volterra and

Fredholm integral equations ([18]), singular and hyper-singular integral equations [19], functional integral equations [20] and many others [18–21].

In this note, the application of HPM with the truncated series of Chebyshev polynomials, is demonstrated for the system of the singular integral equation of the first kind

$$\sum_{j=1}^M \left[\frac{a_{ij}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_j(\tau) d\tau}{\tau-t} + \frac{b_{ij}}{\pi} \int_{-1}^1 K_{ij}(t, \tau) u_j(\tau) d\tau \right] = f_i(t), \quad i=1, \dots, M, \quad -1 < t < 1. \quad (1)$$

where $A = (a_{i,j})$ and $B = (b_{i,j})$ are given constants with $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$ and the forcing functions $f_i(t)$ and kernels $K_{i,j}$ are all known to be real valued or complex valued continuous functions and u_j are unknown functions to be determined, in the case of bounded and unbounded solutions of Eq. (1).

2. METHODOLOGY AND REDUCTION TECHNIQUES

• It is known that the characteristic singular integral equations of the form

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau) d\tau}{\tau-t} = f(t), \quad -1 < t < 1 \quad (2)$$

has four types of solutions Lifanov ([4], pp.42). Based on the bounded and unbounded solution of characteristic equation (2), we can consider the CSIEs of the form

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau) d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(t, \tau) u(\tau) d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1 \quad (3)$$

then have two cases for bounded and unbounded solution of Eq. (3).

Case 1. The bounded solution at the end points $t = \pm 1$ of Eq. (3) is

$$\begin{cases} u(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K(t, s) u(s) ds}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} d\tau - \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)}, \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left[f(\tau) - \int_{-1}^1 K(\tau, t) u(t) dt \right] d\tau = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Case 2. The unbounded solution at the end points $t = \pm 1$ of Eq. (3) is

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2} K(t, s) u(s) ds}{\tau-t} d\tau - \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2} f(\tau) d\tau}{\tau-t}, \\ \int_{-1}^1 u(\tau) d\tau = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Let us consider Eq. (1) and write it as algebraic equations.

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad i = \{1, 2, \dots, M\}, \\ F_i(t) &= \sum_{j=1}^M \frac{b_{ij}}{\pi} \int_{-1}^1 K_{ij}(t, \tau) u_j(\tau) d\tau, \quad i = \{1, 2, \dots, M\}. \end{aligned} \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad i = \{1, 2, \dots, M\}, \\ F_i(t) &= \sum_{j=1}^M \frac{b_{ij}}{\pi} \int_{-1}^1 K_{ij}(t, \tau) u_j(\tau) d\tau, \quad i = \{1, 2, \dots, M\}. \end{aligned} \quad (7)$$

To solve Eq. (6), in the case of $M = 3$, extension matrix $\bar{A}$ has the form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & f_1(t) - F_1(t) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & f_2(t) - F_2(t) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f_3(t) - F_3(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

By applying Gaussian elimination technique to (8), we obtain

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3}(e_{11}f_1 + e_{12}f_2 + e_{13}f_3) - \frac{1}{C_3}(e_{11}F_1 + e_{12}F_2 + e_{13}F_3) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{C_3}(e_{21}f_1 + e_{22}f_2 + e_{23}f_3) - \frac{1}{C_3}(e_{21}F_1 + e_{22}F_2 + e_{23}F_3) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{C_3}(e_{31}f_1 + e_{32}f_2 + e_{33}f_3) - \frac{1}{C_3}(e_{31}F_1 + e_{32}F_2 + e_{33}F_3) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

where $C_3 = a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}$

and

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Then the Eqs. (6)–(7) has the form

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau) d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{C_3} (e_{11}F_1 + e_{12}F_2 + e_{13}F_3) = \frac{1}{C_3} (e_{11}f_1 + e_{12}f_2 + e_{13}f_3), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_2(\tau) d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{C_3} (e_{21}F_1 + e_{22}F_2 + e_{23}F_3) = \frac{1}{C_3} (e_{21}f_1 + e_{22}f_2 + e_{23}f_3), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_3(\tau) d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{C_3} (e_{31}F_1 + e_{32}F_2 + e_{33}F_3) = \frac{1}{C_3} (e_{31}f_1 + e_{32}f_2 + e_{33}f_3). \end{cases} \quad (11)$$

- In order to generalise Eq. (11) to different values of M , we can write it in operator form.

$$L(u_i) + N_i(\bar{u}) = f_i^*(t), \quad i=1, \dots, M. \quad (12)$$

- where $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M)$ and

$$L(u_i) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad N_i(\bar{u}) = \frac{1}{C_M} \sum_{j=1}^M e_{ij}^{[M]} F_j(\bar{u}(t)),$$

$$F_i(\bar{u}(t)) = \sum_{j=1}^M \frac{b_{ij}}{\pi} \int_{-1}^1 K_{ij}(t, \tau) u_j(\tau) d\tau, \quad f_i^*(t) = \frac{1}{C_M} \sum_{j=1}^M e_{ij}^{[M]} f_j(t). \quad (13)$$

- where coefficients C_M and e_{ij}^M are defined by solving $M \times M$ algebraic integral equations.

- Eqs. (12)–(13) can be written in vector form as follows

$$\bar{L}(u) + \bar{N}(u) = \bar{f}^*, \quad i=1, \dots, M,$$

- where $\bar{f}^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_M^*)$ and

$$\bar{L}(u) = (L(u_1), L(u_2), \dots, L(u_M))$$

$$\bar{N}(u) = (N_1(\bar{u}), N_2(\bar{u}), \dots, N_M(\bar{u})).$$

- To find bounded and unbounded solutions of Eqs. (12)–(13), we search the solution in the form.

$$u_{i,r}(t) = w_r(t) v_i(t), \quad r = \{1, 2\}, \quad i=1, \dots, M. \quad (14)$$

- where

$$w_1(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad w_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (15)$$

Remark 1: The Gauss elimination method and the existence of inverse operator helped us greatly to handle system of CSIEs (1). Direct implementation of HPM or modified HPM (MHPM) for solving system of CSIEs (1) did not give any good results. Fortunately, hybrid method gave us very high accurate results.

The detail implementation of HPM and MHPM are given in the next section.

3. DESCRIPTION OF THE HPM AND ITS APPLICATION

- Let us solve the system of CSIEs (12)–(13). To solve it, we construct a convex homotopy function as follows

$$(1-p)(L(v_i(t, p)) - L(u_{i,0}(t))) + p(L(v_i(t, p)) + N_i(v_i(t, p)) - f_i^*(t)) = 0 \quad (16)$$

- and search unknown function $v_i(t)$ in the form

$$v_i(t, p) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{i,k}(t) p^k, \quad i=1, \dots, M \quad (17)$$

- then

$$L\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_{i,k}(t) p^k\right) = L(u_{i,0}(t)) + p\left(f_i^*(t) - N_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_{i,k}(t) p^k\right) - L(u_{i,0}(t))\right) \quad (18)$$

By equating the coefficient of the terms by the same power in p :

$$\begin{aligned} p^0 : v_{i,0}(t) &= u_{i,0}(t), \\ p^1 : v_{i,1}(t) &= L^{-1}(f_i^*(t)) - L^{-1}(N_i(v_{i,0})) - u_{i,0}(t), \\ p^k : v_{i,k} &= -L^{-1}(N_i(v_{i,k-1})), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

- where L^{-1} is the inverse operator of L .
- In the practical problem, we usually choose the initial guess $u_{i,0}$ in the standard HPM as

$$u_{i,0} = f_i(t), i = 1, 2, \dots, M. \quad (20)$$

- In the case of decomposition $f_i(t) = f_{1i}(t) + f_{2i}(t)$, we have the following scheme

$$\begin{aligned} p^0 : v_{i,0}(t) &= L^{-1}(f_{1i}^*(t)), \\ p^1 : v_{i,1}(t) &= L^{-1}(f_{2i}^*(t)) - L^{-1}(N_i(v_{i,0})), \\ p^k : v_{i,k} &= -L^{-1}(N_i(v_{i,k-1})), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

The scheme (21) is called MHPM. A semi-analytical approximate solution for bounded and unbounded cases can be obtained as follows

$$u_{i,r}(t) = w_r(t) \lim_{p \rightarrow 1} v_i(t, p) = w_r(t) \sum_{k=0}^{\infty} v_{i,k}(t) \approx w_r(t) \sum_{k=0}^m v_{i,k}(t), \quad r \in \{1, 2\}. \quad (22)$$

It is noted that if in Eq. (12) operator $N(u) = 0$, then operator equation becomes

$$L(u_i) = f_i^*(t), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (23)$$

If operator L is invertible then the exact solution of (23) is

$$u_{i,r}(t) = w_r(t) L^{-1}(f_i^*(t)), \quad r \in \{1, 2\}. \quad (24)$$

Then standard HPM (19) yields

$$\begin{aligned} p^0 : v_{i,0}(t) &= u_{i,0}(t), \\ p^1 : v_{i,1}(t) &= L^{-1}(f_i^*(t)) - u_{i,0}(t), \\ p^k : v_{i,k}(t) &= 0, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

then from (22) and (25) it follows that

$$u_{i,r}(t) = w_r(t)(v_{i,0}(t) + v_{i,1}(t)) = w_r L^{-1}(f_i(t)), \quad r = \{1, 2\}. \quad (26)$$

which coincides with exact solution of the problem (24).

The scheme (25) and (26) leads to following theorem.

Theorem 1: Let the singular kernel in Eq. (13) $\frac{1}{\tau-t}$ be Cauchy singular kernel, $f_i^*(t) \in H^\alpha[-1,1]$ (Holder class). If operator L in Eq. (23) is linear then iterative scheme (25) provides an exact solution to the operator Eq. (23) for any initial guesses.

4. NUMERICAL EXAMPLE

- Example 1 (Turhan et al. [1]): Consider system of SIEs of the form

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_2(\tau)}{\tau-t} d\tau &= -4t^3 - 2t^2 - 6t + 1 \\ \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{6}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_2(\tau)}{\tau-t} d\tau &= -4t^3 - 6t^2 - 14t + 3 \end{aligned} \quad (27)$$

Exact bounded solutions of Eq. (27) is

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \sqrt{1-t^2} [t^2 + 1], \\ u_2(t) &= \sqrt{1-t^2} [t + 2]. \end{aligned} \quad (28)$$

Before applying HPM, we should use the Gaussian elimination method to obtain

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{\tau-t} d\tau &= \left(-t^3 - \frac{1}{2}t \right) \pi = f_1^*(t), \\ \int_{-1}^1 \frac{u_2(\tau)}{\tau-t} d\tau &= \left(-t^2 - 2t + \frac{1}{2} \right) \pi = f_2^*(t). \end{aligned} \quad (29)$$

We solve Eq. (29) by standard HPM (25). Since Eq. (29) can be written as (23) according to Theorem 1, we are able to get exact solution for both cases. Let us show each of them.

Case1. The bounded solution is searched as follows

$$u_i(t) = \sqrt{1-t^2} v_i(t), \quad i = \{1, 2\}. \quad (30)$$

Comparing (29) with (12), we obtain

$$\begin{aligned} f_1^*(t) &= -t^3 - \frac{1}{2}t, & f_2^*(t) &= -t^2 - 2t + \frac{1}{2}, \\ L_1(u_1(t)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{\tau-t} d\tau, & L_2(u_2(t)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_2(\tau)}{\tau-t} d\tau, \\ N_1(u_1(t)) &= N_2(u_2(t)) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

To solve Eq. (29) by using standard HPM (25), we obtain

$$\begin{aligned} p^0 : v_{1,0}(t) &= f_1^*(t) = -t^3 - \frac{1}{2}t, \quad v_{2,0}(t) = f_2^*(t) = -t^2 - 2t + \frac{1}{2}, \\ p^1 : v_{1,1}(t) &= t^3 + t^2 + \frac{1}{2}t + 1, \quad v_{2,1}(t) = t^2 + 3t + \frac{3}{2}, \\ p^k : v_{1,k}(t) &= 0, \quad v_{2,k}(t) = 0, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

The approximate solution of Eq. (27) is

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \sqrt{1-t^2} (v_{1,0}(t) + v_{1,1}(t)) = \sqrt{1-t^2} \left(-t^3 - \frac{1}{2}t + t^3 + t^2 + \frac{1}{2}t + 1 \right) = \\ &= \sqrt{1-t^2} (t^2 + 1), \\ u_2(t) &= \sqrt{1-t^2} (v_{2,0}(t) + v_{2,1}(t)) = \sqrt{1-t^2} \left(-t^2 - 2t + \frac{1}{2} + t^2 + 3t + \frac{3}{2} \right) = \\ &= \sqrt{1-t^2} (t + 2). \end{aligned} \quad (33)$$

which is identical to the exact solution.

We have chosen as initial guess the following functions

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} v_{1,0}(t) = -\frac{1}{2}t, \\ v_{2,0}(t) = \frac{1}{2}. \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} v_{1,0}(t) = t^3 + 5t - 3, \\ v_{2,0}(t) = -\frac{3}{4}t + 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Remark 2: In the case a), the initial guess $(v_{1,0}, v_{2,0})$ is chosen as the part of $f_1^*(t)$ and $f_2^*(t)$ respectively. For the case b), the initial guess $(v_{1,0}, v_{2,0})$ is selected any continuous function. After applying HPM we got exact solution for any choice of initial guess. In Turhan et al. [1] got also exact solution in the case of bounded solution for Example 1.

Case 2. Let us search unbounded solution of Eq. (29), in the form

$$u_i(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_i(t), \quad i = \{1, 2\}. \quad (34)$$

In this case, the exact solution of (27) is

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(-t^4 + \frac{3}{8} \right), \\ u_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(-t^3 - 2t^2 + t + 1 \right). \end{aligned}$$

It is known that Eq. (27) is equivalent to (29). Therefore we apply standard HPM (19) to (29)

$$\begin{aligned}
p^0 : v_{1,0}(t) &= f_1^*(t) = -t^3 - \frac{1}{2}t, \quad v_{2,0}(t) = f_2^*(t) = -t^2 - 2t + \frac{1}{2}, \\
p^1 : v_{1,1}(t) &= -t^4 + t^3 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}, \quad v_{2,1}(t) = -t^3 - t^2 + 3t + \frac{1}{2}, \\
p^k : v_{1,k}(t) &= 0, \quad v_{2,k}(t) = 0, \quad k = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{35}$$

The approximate solution of Eq. (27) for unbounded solution case is

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}(v_{1,0}(t) + v_{1,1}(t)) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(-t^3 - \frac{1}{2}t - t^4 + t^3 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(-t^4 + \frac{3}{8}\right), \\
u_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}(v_{2,0}(t) + v_{2,1}(t)) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(-t^2 - 2t + \frac{1}{2} - t^3 - t^2 + 3t + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}(-t^3 - 2t^2 + t + 1).
\end{aligned} \tag{36}$$

which is identical to the exact solution.

The initial guess can be chosen as follows

$$\begin{aligned}
\text{a) } \begin{cases} v_{1,0}(t) = t^2 - \frac{1}{2}t, \\ v_{2,0}(t) = -2t + \frac{1}{2}. \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} v_{1,0}(t) = t^4 + t^3 - \frac{3}{4}, \\ v_{2,0}(t) = t^3 - \frac{3}{7}t. \end{cases}
\end{aligned}$$

Remark 3: It is found that when we apply standard HPM gave exact results for any initial guess chosen in this case too. In Turhan et al. [1] got also exact solution for unbounded case.

- **Example 2** (Turhan et al. [1]): Consider system of SIEs of the form

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_2(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 t^3 \tau^3 u_1(\tau) d\tau &= -2t^5 - 10t^3 - \frac{13}{20}t, \\
\frac{3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_2(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 t^5 \tau^5 u_1(\tau) d\tau &= -t^5 - \frac{15}{2}t^3 - \frac{3}{40}t.
\end{aligned} \tag{37}$$

The Gaussian elimination method reduces Eq. (37) in the form

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{2}{5\pi} \int_{-1}^1 t^5 \tau^5 u_1(\tau) d\tau - \frac{1}{5\pi} \int_{-1}^1 t^3 \tau^3 u_1(\tau) d\tau &= -t^3 + \frac{1}{10}t \\
\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_2(\tau)}{\tau-t} d\tau - \frac{1}{5\pi} \int_{-1}^1 t^5 \tau^5 u_1(\tau) d\tau + \frac{3}{5\pi} \int_{-1}^1 t^3 \tau^3 u_1(\tau) d\tau &= -t^5 - \frac{9}{2}t^3 - \frac{3}{8}t
\end{aligned} \tag{38}$$

Case 1. We know that the bounded solution is searched in the form

$$u_i(t) = \sqrt{1-t^2} v_i(t), \quad i = \{1, 2\}. \tag{39}$$

In this case, the exact solution of Eq. (37) is

$$u_1(t) = \sqrt{1-t^2} \left(t^2 + \frac{2}{5} \right),$$

$$u_2(t) = \sqrt{1-t^2} (t^4 + 5t^2 + 3).$$

Comparing (38) to (12), we get

$$f_1^*(t) = -t^3 + \frac{1}{10}t, \quad f_2^*(t) = -t^5 - \frac{9}{2}t^3 - \frac{3}{8}t,$$

$$L_1(u_1(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad L_2(u_2(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_2(\tau)}{\tau-t} d\tau,$$

$$N_1(u_1(t)) = \frac{2}{5\pi} \int_{-1}^1 t^5 \tau^5 u_1(\tau) d\tau - \frac{1}{5\pi} \int_{-1}^1 t^3 \tau^3 u_1(\tau) d\tau,$$

$$N_2(u_2(t)) = -\frac{1}{5\pi} \int_{-1}^1 t^5 \tau^5 u_2(\tau) d\tau + \frac{3}{5\pi} \int_{-1}^1 t^3 \tau^3 u_2(\tau) d\tau. \quad (40)$$

Using the standard HPM (19), we solve Eq. (38) as follows

$$p^0 : v_{1,0}(t) = -t^3 + \frac{1}{10}t, \quad v_{2,0}(t) = -t^5 - \frac{9}{2}t^3 - \frac{3}{8}t,$$

$$p^1 : v_{1,1}(t) = -\frac{3}{320}t^4 - \frac{1603}{1600}t^2 - \frac{5117}{12800},$$

$$v_{2,1}(t) = \frac{643}{640}t^4 + \frac{31889}{6400}t^2 + \frac{76593}{25600},$$

$$p^2 : v_{1,2}(t) = \frac{3}{320}t^4 - \frac{3}{1600}t^2 + \frac{3}{12800},$$

$$v_{2,2}(t) = -\frac{3}{640}t^4 + \frac{111}{6400}t^2 + \frac{207}{25600},$$

$$p^k : v_{1,k}(t) = 0, \quad v_{2,k}(t) = 0, \quad k = 3, 4, \dots \quad (41)$$

The approximate solution of Eq. (37) is

$$u_1(t) = \sqrt{1-t^2} (v_{1,0}(t) + v_{1,1}(t) + v_{1,2}(t)) = \sqrt{1-t^2} \left(t^2 + \frac{2}{5} \right),$$

$$u_2(t) = \sqrt{1-t^2} (v_{2,0}(t) + v_{2,1}(t) + v_{2,2}(t)) = \sqrt{1-t^2} (t^4 + 5t^2 + 3). \quad (42)$$

which is identical to the exact solution.

Remark 4: In this case, the standard HPM (19) gives exact solution for any initial guess. In Turhan et al. [1] got also exact solution for bounded case but it is not shown that Chebyshev approximation method is exact or not for unbounded case.

Case 2. Let us search unbounded solution of Eq. (37), by using standard HPM (19) of form

$$u_i(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_i(t), \quad i = \{1, 2\}. \quad (43)$$

The exact unbounded solution of Eq. (37) is

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(-t^4 + \frac{3}{5}t^2 + \frac{3}{40} \right),$$

$$u_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(-t^6 - 4t^4 + 2t^2 + \frac{13}{16} \right).$$

Applying standard HPM (19) to Eq. (38) in the case of unbounded case we obtain

$$\begin{aligned} p^0 : v_{1,0}(t) &= \frac{t}{10} + 2, \quad v_{2,0}(t) = -\frac{3t}{8} + 2, \\ p^1 : v_{1,1}(t) &= -\frac{1}{8}t^6 - \frac{789}{800}t^4 + \frac{1913}{3200}t^2 - \frac{1}{10}t - \frac{12321}{6400}, \\ v_{2,1}(t) &= -\frac{159}{160}t^6 - \frac{6441}{1600}t^4 + \frac{12867}{6400}t^2 + \frac{3}{8}t - \frac{15169}{12800}, \\ p^2 : v_{1,1}(t) &= \frac{1}{80}t^6 - \frac{11}{800}t^4 + \frac{7}{3200}t^2 + \frac{1}{6400}, \\ v_{2,1}(t) &= -\frac{1}{160}t^6 + \frac{41}{1600}t^4 - \frac{67}{6400}t^2 - \frac{31}{12800}, \\ p^k : v_{1,k}(t) &= 0, \quad v_{2,k}(t) = 0, \quad k = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (44)$$

The approximate solution of Eq. (37) for unbounded case is

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} (v_{1,0}(t) + v_{1,1}(t) + v_{1,2}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(-t^4 + \frac{3}{5}t^2 + \frac{3}{40} \right), \\ u_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} (v_{2,0}(t) + v_{2,1}(t) + v_{2,2}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(-t^6 - 4t^4 + 2t^2 + \frac{13}{16} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

which is identical to the exact solution.

5. CONCLUSION

In this paper, we have developed HPM for the system of singular integral equations of the first kind in the cases of bounded and unbounded solutions. In addition, we have applied HPM to several examples, as illustrated above. Results of the examples revealed that HPM gave better results than the Chebyshev series method given in [1]. These numerical examples illustrated above show that HPM coincides with the exact solution for any choice of the initial guess.

References

1. Turhan I., O'guz H., Yusufog'lu E. Chebyshev polynomial solution of the system of Cauchy-type singular integral equations of the first kind. International // Journal of Computer Mathematics. 2013. Vol. 90 (5). P. 944–954.
2. Muskhelishvili N. I. Singular Integral Equations. Noordhoff : Groningen, 1953.

3. Vekua N. P. Systems of Singular integral Equations. Noordhoff : Groningen, 1967.
4. Lifanov I. K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices. Utrecht : The Netherlands, 1996.
5. Boykov I. V. Numerical Methods for Solution of Singular Integral Equations // arXiv:1610.09611v1[math.NA]30 Oct 2016.
6. Golberg M. A. The numerical solution of Cauchy singular integral equations with constant coefficients // J. Integral Equation and Its Application. 1985. Vol. 9. P. 127–151.
7. Berthold D., Hoppe W., Silbermann B. A fast algorithm for solving the generalized airfoil equation // J. Comput. Appl. Math. 1992. Vol. 43. P. 185–219.
8. Capobianco M. R., Russo M. G. Uniform convergence estimates for a collocation method for the Cauchy singular integral equation // Journal of Integral Equation and Its Appl. 1997. Vol. 9. P. 21–45.
9. Eshkuvatov Z. K., Nik Long N. M. A., Abdulkawi M. Approximate solution of singular integral equations of the first kind with Cauchy kernel // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol. 22. P. 651–657.
10. Laurita C. A quadrature method for Cauchy singular integral equations with index -1, IMA // J. Numer. Anal. 2012. Vol. 32. P. 1071–1095.
11. De Bonis M. C., Laurita C. Nyström method for Cauchy singular equations with negative index // J. Comput. Appl. Math. 2009. Vol. 232. P. 523–538.
12. Kumar S., Singh Om P., Dixit S. Homotopy Perturbation Method for Solving System of Generalized Abel's Integral Equations // Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM). 2011. Vol. 6(11). P. 2009–2024.
13. De Bonis M. C., Laurita C. Numerical solution of systems of Cauchy singular integral equations with constant coefficients // Applied Mathematics and Computation. 2012. Vol. 219. P. 1391–1410.
14. Durua H. K., Yusufog'lu. E. Solution of the System of Cauchy-type Singular Integral Equations of the First Kind by Third- and Fourth- Kind Chebyshev Polynomials // AIP Conf. Proc. 1648. 2015. P. 480002-1–480002-4. doi: 10.1063/1.491268
15. Shahmorad S., Ahdiaghdam S. Approximate solution of a system of singular integral equations of the first kind by using Chebyshev polynomials Iranian // Journal of Numerical Analysis and Optimization. 2019. Vol. 9, № 2. P. 31–47.
16. Ji-Huan He, Homotopy perturbation technique, Comput. Methods Appl // Mech. Engrg. 1999. Vol. 178. P. 257–262.
17. Ji-Huan He. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique // Applied Mathematics and Computation. 2003. Vol. 135. P. 73–79.
18. Wazwaz A. M. Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications. Berlin Heidelberg : Beijing and Springer-Verlag, 2011.
19. Es hkuvatov Z. K. Homotopy Perturbation Method and Chebyshev Polynomials for Solving a Class of Singular and Hypersingular Integral Equations // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2018. Vol. 8 (3). P. 337–350.
20. Abbasbandy S. Application of He's Homotopy Perturbation Method to Functional Integral Equations // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. Vol. 31. P. 1243–1247.
21. Siddiqui A. M., Mahmood R., Ghorı Q. K. Homotopy Perturbation Method for Thin Film Flow of a Third Grade Fluid Down an Inclined Plane // Chaos, Solitons & Fractals. 2008. Vol. 35, № 1. P. 140–147.

2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 517.929; 517.955.4

Об одном смешанном функционально-дифференциальном уравнении

Александр Эдуардович Рассадин

Высшая школа экономики, Нижний Новгород, Россия
brat_ras@list.ru

Аннотация. Для функционально-дифференциального уравнения, линейный оператор правой части которого задается с помощью оператора пространственного сдвига так, что оно аппроксимирует линейное уравнение диффузии-теплопроводности, найдены два различных представления точного решения задачи Коши на прямой. С помощью методов теории операторных полугрупп из этих представлений решения получены два различных представления резольвенты для линейного оператора его правой части. Из этих величин сконструированы аппроксимации интеграла Пуассона для произвольного начального условия и соответствующего полугруппе Гаусса – Вейерштрасса оператора резольвенты.

Ключевые слова: модифицированные функции Бесселя первого рода, теорема Хилле – Иосиды, преобразование Лапласа, норма оператора, ряд Тейлора

On one mixed functional differential equation

Alexander E. Rassadin

Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia
brat_ras@list.ru

Abstract. Two different representations of the exact solution of the Cauchy problem on a straight line are found for a functional differential equation, the linear operator of the right side of which is given using the spatial shift operator so that it approximates the linear diffusion-heat equation. Using the methods of the theory of operator semigroups, two different representations of the resolvent for the linear operator of its right side are obtained from these representations of the solution. Approximations of the Poisson integral for an arbitrary initial condition and corresponding to the Gauss-Weierstrass semigroup of the resolvent operator are constructed from these quantities.

Keywords: the modified Bessel functions of the first kind, the Hille-Yosida theorem, the Laplace transform, operator norm, the Taylor series

В настоящее время теория функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) является одним из самых интенсивно развивающихся разделов математической физики (см., например, [1] и ссылки там). Между тем, в работе [2] указано, что смешанные ФДУ, т.е. ФДУ для неизвестной функции с не менее чем двумя аргументами, в котором производные от этой функции берутся только по одному из её аргументов, практически не исследованы.

Рассмотрим задачу Коши на прямой для следующего смешанного ФДУ:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{u(x+a,t) - 2 \cdot u(x,t) + u(x-a,t)}{2}, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$ и $a > 0$.

Эта задача естественным образом возникает при решении методом прямых задачи Коши для одномерного уравнения диффузии-теплопроводности [2]:

$$\frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t} = \frac{\alpha \cdot a^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}(x,t)}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R. \quad (2)$$

Будем считать, что при $t \geq 0$ $u \in L^2(R)$, тогда ФДУ (1) после его преобразования Фурье сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} = \alpha \cdot (\cos ka - 1) \cdot U(k,t), \quad (3)$$

где $U(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) \cdot \exp(-ikx) \cdot dx$.

Точное решение уравнения (3) имеет вид:

$$U(k,t) = \exp(-\alpha t + \alpha t \cdot \cos ka) \cdot U(k,0). \quad (4)$$

Применяя к формуле (4) известное разложение [3] в ряд Лорана для производящей функции модифицированных функций Бесселя первого рода $I_n(z)$ и вычисляя затем от неё обратное преобразование Фурье, получим точное решение задачи Коши (1):

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t) \cdot I_n(\alpha t) \cdot u_0(x - na). \quad (5)$$

Из структуры формулы (5) видно, что при её подстановке в ФДУ (1) оно тождественно удовлетворяется вследствие рекуррентных соотношений для модифицированных функций Бесселя [3], поэтому решение (5) можно рассматривать не только в функциональном пространстве $L^2(R)$, но и в других функциональных пространствах: $L^1(R)$, $C_b(R)$ и т.д.

Перепишем задачу Коши (1) в форме, принятой в теории C_0 -полугрупп [4]:

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u_0, \quad (6)$$

где инфинитезимальный генератор полугруппы:

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (T_a - 2 \cdot I + T_{-a}) \equiv \frac{\alpha}{2} \cdot (T_{a/2} - T_{-a/2})^2 \quad (7)$$

выражается через единичный оператор I и оператор T_a пространственного сдвига на a : $(T_a u)(x, t) = u(x + a, t)$.

В каждом из функциональных пространств $L^2(R)$, $L^1(R)$ или $C_b(R)$ $\|T_a\| = 1$, поэтому линейный оператор (7) также ограничен: $\|A\| \leq 2\alpha$, значит, существует операторная экспонента от этого оператора, задаваемая сходящимся по норме рядом $\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \cdot t^k / k!$.

Легко видеть, что последовательные степени оператора (7) равны:

$$A^k = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l C_{2k}^l \cdot T_{(l-k)a}, \quad (8)$$

где C_{2k}^l – биномиальные коэффициенты.

Комбинируя формулы (6) и (8), несложно получить альтернативное представлению (5) представление точного решения задачи Коши (1):

$$u(x, t) = (\exp(At)u_0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l C_{2k}^l u_0(x + (l - k)a). \quad (9)$$

Ясно, что формула (9) является разложением в ряд Тейлора по времени для решения (5). Также очевидно, что представленный выше её вывод с помощью теории C_0 -полугрупп [4] гораздо проще её вывода на основе перемножения известных степенных рядов для экспоненты и модифицированных функций Бесселя.

С другой стороны, хорошо известно, что решение задачи Коши (2) (с тем же начальным условием, что и для ФДУ (1)) имеет вид [4]:

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{2\alpha a^2 t}\right] \cdot u_0(\xi) \cdot d\xi. \quad (10)$$

Далее, из выражений (5) и (10) легко видеть, что для $u_0 \in L^1(R)$ решения параболического уравнения (2) и ФДУ (1) близки в интегральном смысле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x, t) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \cdot dx. \quad (11)$$

Интеграл (10) точно вычисляется очень редко, однако для его приближённого вычисления в силу соотношений (11) могут быть использованы и ряд (9) – для $\alpha t \ll 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\alpha a^2 t}\right] \cdot \frac{u_0(\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{2\pi\alpha a^2 t}} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l C_{2k}^l u_0(x + (l-k)a), \quad (12)$$

и ряд (5) – для $\alpha t \geq 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\alpha a^2 t}\right] \cdot \frac{u_0(\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{2\pi\alpha a^2 t}} \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t) \cdot I_n(\alpha t) \cdot u_0(x - na), \quad (13)$$

причём в правой части формулы (13) можно брать небольшое число ряда: $|n| \sim \alpha t$.

Наконец, поскольку C_0 -полугруппа Гаусса-Вейерштрасса (10) близка к C_0 -полугруппе (5), то и резольвенты их генераторов также близки.

На произвольную функцию $f(x)$ действие резольвенты инфинитезимального генератора $\tilde{A} = \alpha a^2 / 2 \cdot \partial^2 / \partial x^2$ C_0 -полугруппы Гаусса-Вейерштрасса задаётся интегральным оператором вида [4]:

$$(R_\lambda(\tilde{A})f)(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha a^2 \lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\sqrt{\frac{2\lambda}{\alpha}} \frac{|x-\xi|}{a}\right] \cdot f(\xi) \cdot d\xi. \quad (14)$$

Для вычисления резольвенты оператора (7) воспользуемся формулой [4]:

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = -\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) \cdot \exp(At) \cdot dt. \quad (15)$$

Извлекая оператор C_0 -полугруппы $(\exp(At))_{t \geq 0}$ из формулы (5):

$$\exp(At) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t) \cdot I_n(\alpha t) \cdot T_{na} \quad (16)$$

и, подставляя выражение (15) в формулу (16), с помощью известных преобразований Лапласа от модифицированных функций Бесселя получим:

$$R_\lambda(A) = -\frac{I}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cdot (T_{na} + T_{-na})}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha} \cdot (\lambda + \alpha + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha})^n}. \quad (17)$$

В пространствах $L^2(R)$, $L^1(R)$ и $C_b(R)$ C_0 -полугруппа (16) является сжимающей, потому что из формулы (16) следует, что $\|\exp(At)\| \leq 1$. Значит, согласно теореме Хилле-Иосиды, оператор (17) ограничен, а оператор (7) плотно определён и замкнут на своей области определения. Более того, с помощью формулы (17) легко убедиться в том, что $\|R_\lambda(A)\| \leq 1/\lambda$ при $\lambda > 0$.

Если стартовать с выражения (9), то, действуя аналогичным образом, легко прийти к следующей формуле:

$$R_\lambda(A) = -\frac{I}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{2\lambda} \right)^k \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l C_{2k}^l \cdot T_{(l-k)a}. \quad (18)$$

Разложение (18), очевидно, представляет собой операторный ряд Тейлора по степеням $1/\lambda$ для суммы (17), который сходится во внешней области круга $|\lambda| > 2\alpha$ на комплексной плоскости λ . Однако из формулы (17) видно, что точки $\lambda = 0$ и $\lambda = -2\alpha$ являются точками ветвления выражения (17), то есть резольвентное множество оператора (7) $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus [-2\alpha, 0]$, следовательно, ряд (18) определён на более узкой области комплексной плоскости λ , чем ряд (17).

Таким образом, интеграл (14) можно вычислить приближённо по формуле:

$$(R_\lambda(\tilde{A})f)(x) \approx -\frac{f(x)}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cdot (f(x+na) + f(x-na))}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha} \cdot (\lambda + \alpha + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha})^n} \quad (19)$$

или по формуле:

$$(R_\lambda(\tilde{A})f)(x) \approx -\frac{f(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{2\lambda} \right)^k \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l C_{2k}^l \cdot f(x + (l-k)a). \quad (20)$$

В заключение заметим, что собственными функциями оператора (7) являются плоские волны $u_k(x) = \exp(ikx)$, отвечающие его собственному значению $\lambda(k) = -2\alpha \cdot \sin^2 ka/2$. Это означает, что для выяснения вопроса о точности приближений (19) и (20) удобно рассматривать их преобразования Фурье, а именно, если $f \in L^2(R)$, то их преобразования Фурье совпадают и равны:

$$F[R_\lambda(A)f](k) = -\frac{F[f](k)}{\lambda + 2\alpha \cdot \sin^2 ka/2}, \quad (21)$$

где $F[f](k)$ – преобразование Фурье функции f .

Преобразование Фурье от интеграла (14) равно:

$$F[R_\lambda(\tilde{A})f](k) = -\frac{F[f](k)}{\lambda + \alpha k^2 a^2/2}. \quad (22)$$

Исследование показывает, что выражение (21) близко к выражению (22) практически при всех положительных λ при $ka \leq \pi/4$.

Для выяснения вопроса о точности выражений (12) и (13) целесообразно рассмотреть те исключительные случаи, когда интеграл (10) вычисляется.

Например, для $u_0(x) = \exp(-x^2)$ формулы (12) и (13) сводятся к:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\alpha a^2 t}} \exp\left[-\frac{x^2}{1+2\alpha a^2 t}\right] \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l C_{2k}^l \exp[-(x+(l-k)a)^2] \quad (23)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\alpha a^2 t}} \exp\left[-\frac{x^2}{1+2\alpha a^2 t}\right] \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t) \cdot I_n(\alpha t) \cdot \exp[-(x-na)^2]. \quad (24)$$

Подобрав параметры α и a так, чтобы при заданном коэффициенте диффузии $D = \alpha a^2/2$ правые и левые части формул (23) и (24) были максимально близки, можно использовать те же значения этих параметров в формулах (12) и (13) в тех случаях, когда интеграл (10) не берётся.

Список литературы

1. Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи математических наук. 2016. Т. 71, № 4. С. 3–112.
2. Мышкис А. Д. Смешанные функционально-дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5–120.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М. : Наука, 1974. 296 с.
4. Хилле Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. М. : ИЛ, 1962. 830 с.

Обратная краевая задача для псевдогиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями

Рена Шафи гызы Садыхзаде¹, Яшар Топуш оглы Мегралиев²

^{1,2}Бакинский государственный университет, Баку,
Азербайджан

¹rena7097@gmail.com, ²yashar_aze@mail.ru

Аннотация. Представлено исследование обратной краевой задачи с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени, для псевдогиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью метода сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Затем вновь производится переход к исходной обратной задаче, в результате делается вывод о разрешимости исходной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, псевдогиперболическое уравнение третьего порядка, метод Фурье, классическое решение

Inverse boundary value problem for the third order pseudo hyperbolic equation with periodic and integral conditions

Rena Shafi Sadikhzade¹, Yashar Topush Megrallyev²

^{1,2}Baku State University, Baku, Azerbaijani

¹rena7097@gmail.com, ²yashar_aze@mail.ru

Abstract. In this paper we study an inverse boundary value problem with an unknown time-dependent coefficient for a third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions. When solving the original inverse boundary value problem, the transition from the original inverse problem to some auxiliary inverse problem is carried out. The existence and uniqueness of a solution to an auxiliary problem are proved with the help of contracted mappings. Then the transition to the original inverse problem is again made, as a result, a conclusion is made about the solvability of the original inverse problem.

Keywords: Inverse boundary value problem, third-order pseudo-hyperbolic equation, Fourier method, classical solution

Псевдогиперболические уравнения возникают в теории нестационарного течения вязкого газа при распространении начальных уплотнений в вязком газе [6], в теории солитонов [7] при описании процесса

движения электронов в системе «сверхпроводник – диэлектрик с туннельной проводимостью – сверхпроводник».

Разрешимость обратных задач в тех или иных постановках, с теми или иными условиями переопределения для псевдо гиперболических уравнений была предметом исследования в работах [1-5].

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) - \alpha u_{txx}(x,t) - \beta u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

периодическим условием

$$u(0,t) = u(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

и дополнительным условием

$$u(x_0,t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5)$$

где $x_0 \in (0,1)$, $\alpha > 0, \beta > 0$ – заданные числа, $f(x,t), \varphi(x), \psi(x), h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Введем обозначения

$$\tilde{C}^2(D_T) = \{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{txx}(x,t) \in C(D_T)\}.$$

Определение 1. Пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t) \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T)$, $a(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих уравнению (1) в D_T , условиям (2) в $[0,1]$, условиями (3)–(5) в $[0,T]$, назовем классическим решением обратной краевой задачи (1)–(5).

Теорема 1. Пусть $f(x,t) \in C(\bar{D}_T)$, $\int_0^1 f(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$,

$$\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1], h(t) \in C^2[0,T], \quad \int_0^1 f(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad h(t) \neq 0$$

при $t \in [0,T]$ и выполняются условия согласования:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \quad (6)$$

$$\varphi(x_0) - h(0), \quad \psi(x_0) = h'(0) \quad (7)$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)–(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x, t) \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T)$ и $a(t) \in C[0, T]$, из соотношений (1)–(3) и

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (8)$$

$$h''(t) - \alpha u_{xx}(x_0, t) - \beta u_{xx}(x_0, t) = a(t)h(t) + f(x_0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (9)$$

$$1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, \dots, \cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x, \dots \quad (10)$$

является базисом в $L_2(0, 1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$ ($k = 0, 1, \dots$). Так как система (10) образует базис в $L_2(0, 1)$, то очевидно, что для каждого решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1)–(3), (8), (9) первая компонента $u(x, t)$ имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k), \quad (11)$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x, t) dx, \quad u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тогда, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t; u, a) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (12)$$

$$u''_{ik}(t) + \alpha \lambda_k^2 u'_{ik}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{ik}(t) = F_{ik}(t; u, a) \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \quad (13)$$

$$u_{10}(0) = \varphi_{10}, \quad u'_{10}(0) = \psi_{10}, \quad (14)$$

$$u_{ik}(0) = \varphi_{ik}, \quad u'_{ik}(0) = \psi_{ik} \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots), \quad (15)$$

где

$$F_{1k}(t) = a(t)u_{1k}(t) + f_{1k}(t), \quad (k = 0, 1, \dots), \quad f_{10}(t) = \int_0^1 f(x, t) dx,$$

$$f_{1k}(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx, \quad \varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \psi_{10} = 2 \int_0^1 \psi(x) dx,$$

$$\varphi_{1k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_{1k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$F_{2k}(t) = a(t)u_{2k}(t) + a(t)g_{2k}(t) + f_{2k}(t),$$

$$f_{2k}(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin \lambda_k x dx, \quad g_{2k}(t) = 2 \int_0^1 g(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\varphi_{2k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \psi_{2k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Теперь предположим, что

$$\frac{\alpha^2 \pi^2}{8} - \beta > 0.$$

Решая задачу (12), (13), находим:

$$u_{10}(t) = \varphi_{10} + t \psi_{10} + \int_0^t (t - \tau) F_{10}(\tau; u, a) d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (16)$$

$$u_{ik}(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k} t}) \phi_{ik} + (e^{\mu_{2k} t} - e^{\mu_{1k} t}) \psi_{ik} + \right. \\ \left. + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots), \quad (17)$$

где

$$\mu_{ik} = -\frac{\alpha \lambda_k^2}{2} + (-1)^i \lambda_k \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda_k^2}{4} - \beta} \quad (i = 1, 2),$$

$$\gamma_k = \mu_{2k} - \mu_{1k} = 2 \lambda_k \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda_k^2}{4} - \beta} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

После подстановки выражения из (16), (17) в (11), для определения компоненты $u(x, t)$ решения задачи (1)–(3), (8), (9) получаем:

$$u(x, t) = \varphi_{10} + t \psi_{10} + \int_0^t (t - \tau) F_{10}(\tau; u, a) d\tau + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k} t}) \phi_{1k} + (e^{\mu_{2k} t} - e^{\mu_{1k} t}) \psi_{1k} + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \right\} \cos \lambda_k x +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k} t}) \phi_{2k} + (e^{\mu_{2k} t} - e^{\mu_{1k} t}) \psi_{2k} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \right\} \sin \lambda_k x. \quad (18)
\end{aligned}$$

Из (9), с учетом (17), имеем:

$$\begin{aligned}
a(t) = [h(t)]^{-1} & \left\{ h''(t) - f(x_0, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k} t}) \phi_{1k} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} t}) \psi_{1k} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \cos \lambda_k x_0 + \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k} t}) \phi_{2k} + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} t}) \psi_{2k} \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \sin \lambda_k x_0. \right\} \quad (19)
\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (8),(9) сведено к решению системы (18), (19) относительно неизвестных функций $u(x, t)$ и $a(t)$.

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (6) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\alpha > 0, \beta > 0, \frac{\alpha^2}{8} - \beta > 0$.
2. $\varphi(x) \in C^2[0, 1], \varphi'''(x) \in L_2(0, 1), \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1)$.
3. $\psi(x) \in C^2[0, 1], \psi'''(x) \in L_2(0, 1), \psi(0) = \psi(1), \psi'(0) = \psi'(1), \psi''(0) = \psi''(1)$.
4. $f(x, t), f_x(x, t), f_{xx}(x, t) \in C(D_T), f_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T),$
 $f(0, t) = f(1, t), f_x(0, t) = f_x(1, t), f_{xx}(0, t) = f_{xx}(1, t) (0 \leq t \leq T).$
5. $h(t) \in C^2[0, T], h(t) \neq 0, (0 \leq t \leq T).$

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1–5. Тогда при малых значениях T задача (1)–(3), (8), (9) имеет единственное решение

В силу теоремы 1, из теоремы 2 немедленно вытекает однозначная разрешимость задачи (1)–(5).

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2,

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \text{ и выполнены условия согласования (6), (7).}$$

Тогда при малых значениях T задача (1)-(5) имеет единственное классическое решение.

Список литературы

1. Тихонов А. И. Об устойчивости обратных задач // Доклады АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
2. Лаврентьев М. М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Доклады АН СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 520–521.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М. : Наука, 1980. 288 с.
4. Иванов В. К., Васин В. В., Танина В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
5. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М. : МГУ, 1994. 206 с.
6. Войт С. С. Распространение начальных уплотнений в вязком газе // Ученые записки МГУ. Серия: Механика. 1954. Т. 4, № 172. С. 125–142.
7. Лонгрен К., Скотт Э. Солитоны в действии. М. : Мир, 1981.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 520.272.2

К вопросу о моделировании антенн с заданной диаграммой направленности

**Павел Владимирович Айкашев¹,
Антонина Геннадьевна Темникова²**

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹aikashev.pavel@mail.ru

Аннотация. Одной из основных задач современной радиоэлектроники является анализ и синтез широкополосных радиосистем и широкополосных радиосигналов. Необходимость расширения полосы частот обусловлена современными требованиями к повышению скорости передачи информации, повышению уровня помехозащищенности и емкости радиосистем. Антенны являются одними из основных устройств в системах радиолокации, телекоммуникаций, радиотехники, следовательно, эти требования относятся и к антеннам. В связи с этим возникает необходимость в разработке аналитических, численных и программных методов анализа и синтеза фрактальных и генетических антенн. Рассматривается возможность получения аналитической функции, синтезирующей антенну с заданной диаграммой направленности, с помощью применения прямого и обратного преобразования Фурье. Проведено сравнение эффективности решения задачи синтеза антенны с заданной диаграммой направленности с помощью преобразования Фурье и с помощью численных схем. Результаты работы могут быть использованы при исследовании и конструировании антенн с различной топологией.

Ключевые слова: диаграмма направленности, преобразование Фурье, аналитическое решение

On the modeling of antennas with a given directional pattern

Pavel V. Aikashev¹, Antonina G. Temnikova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹aikashev.pavel@mail.ru

Abstract. One of the main tasks of modern radio electronics is the analysis and synthesis of broadband radio systems and broadband radio signals. The need to expand the frequency band is due to modern requirements to increase the speed of information transmission, increase the level of noise immunity and capacity of radio systems. Antennas are one of the basic devices in radiolocation systems, telecommunications, radio engineering and, therefore, these requirements apply to the antennas. In this regard, there is a need to develop analytical, numerical and software

methods for the analysis and synthesis of fractal and genetic antennas. The possibility of obtaining an analytical function that synthesizes an antenna with a given radiation pattern by using the forward and inverse Fourier transform is considered. The effectiveness of solving the problem of synthesizing an antenna with a given radiation pattern using the Fourier transform and using the numerical schemes is compared. The results can be used in the study and design of antennas with different topologies.

Keywords: directivity diagram, Fourier transform, analytical solution

Введение

Начиная с середины прошлого века антенны являются одной из наиболее быстро развивающихся областей радиотехники. Учитывая, что в последние два десятилетия весь мир стремительно развивается в сфере информационных технологий, то необходимо развивать современные технологии синтеза и анализа антенн, соответствующих заданным условиям.

В связи с этим возникает необходимость численного моделирования синтеза антенн, имеющих различную геометрическую конфигурацию. Задача синтеза антенн осложняется тем, что их модели описываются операторными уравнениями первого рода, т.е. некорректными задачами.

В статье предлагается аналитический метод решения задачи синтеза антенн, с заданной диаграммой направленности. Для получения аналитического решения поставленной задачи применяется прямое и обратное преобразование Фурье, а в случае дискретно заданной диаграммы направленности применяется дискретное и быстрое преобразование Фурье.

1. Постановка задачи

Важной характеристикой антенн, является диаграмма направленности антенны [1]. Анализ и синтезу антенн с различной топологией, но с заданной диаграммой направленности, посвящено большое число работ, достаточно подробная библиография которых содержится в [2–7].

Следуя работе [2], приведем постановку задачи синтеза антенны с заданной диаграммой направленности.

Пусть задана требуемая диаграмма направленности, выраженная функцией $h(k_1, k_2)$ в области $\Omega = [-|k|, |k|]^2$, где k – волновое число.

Необходимо определить функцию $g(\zeta, \eta)$ в раскрыве антенны $\Omega_1 = [-|k|, |k|]$.

Диаграмма направленности и искомая функция $g(\zeta, \eta)$ связаны следующим уравнением [1]

$$h(k_1, k_2) = \int_{\sigma} F(\zeta, \eta) e^{i(k_1 \zeta + k_2 \eta)} d\zeta d\eta = \int_{E_2} g(\zeta, \eta) e^{i(k_1 \zeta + k_2 \eta)} d\zeta d\eta. \quad (1)$$

Формула (1) является обратным преобразованием Фурье [3] функции $g(\zeta, \eta)$. Действительно, так как функция $h(k_1, k_2)$ вне области $\Omega = [-|k|, |k|]^2$ стремится к нулю, то область интегрирования можно расширить на всю плоскость. Так как перед интегралом в правой части обратного преобразования Фурье должна стоять константа $\frac{1}{4\pi^2}$, то представим функцию $h(k_1, k_2)$ в следующем виде:

$$h(k_1, k_2) = 4\pi^2 h_1(k_1, k_2).$$

Тогда получим

$$4\pi^2 h_1(k_1, k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta, \eta) e^{i(k_1 \zeta + k_2 \eta)} d\zeta d\eta.$$

или

$$h_1(k_1, k_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta, \eta) e^{i(k_1 \zeta + k_2 \eta)} d\zeta d\eta. \quad (2)$$

Формула (2) является обратным преобразованием Фурье функции $g(\zeta, \eta)$, т.е. функция $g(\zeta, \eta)$ является Фурье-образом для функции $h_1(k_1, k_2)$. Так как преобразование Фурье обратимо в пространстве L_2 , то можно получить аналитическое выражение для искомой функции $g(\zeta, \eta)$, применив прямое преобразование Фурье к функции $h_1(k_1, k_2)$

$$g(\zeta, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(k_1, k_2) e^{-i(k_1 \zeta + k_2 \eta)} dk_1 dk_2. \quad (3)$$

Формула (3) является аналитическим выражением функции $g(\zeta, \eta)$ по заданной диаграмме направленности, выраженной функцией $h_1(k_1, k_2)$.

2. Результаты

Пусть необходимо синтезировать антенну диаграмма направленности, $h(k_1, k_2)$ выраженную следующим выражение

$$h(t, \tau) = e^{-(5t-2.5)^2 - (5\tau-2.5)^2}. \quad (4)$$

График функции (4) показан на рис. 1.

Применив прямое преобразование Фурье (3) к функции $h_1(k_1, k_2)$ было получено следующее аналитическое выражения для функции $g(\zeta, \eta)$:

$$g(\zeta, \eta) = 0.3183098862e^{-0.01\zeta^2 - 0.01\eta^2 - I(0.5\zeta + 0.5\eta)}. \quad (5)$$

График действительной части функции (5) приведен на рис. 2.

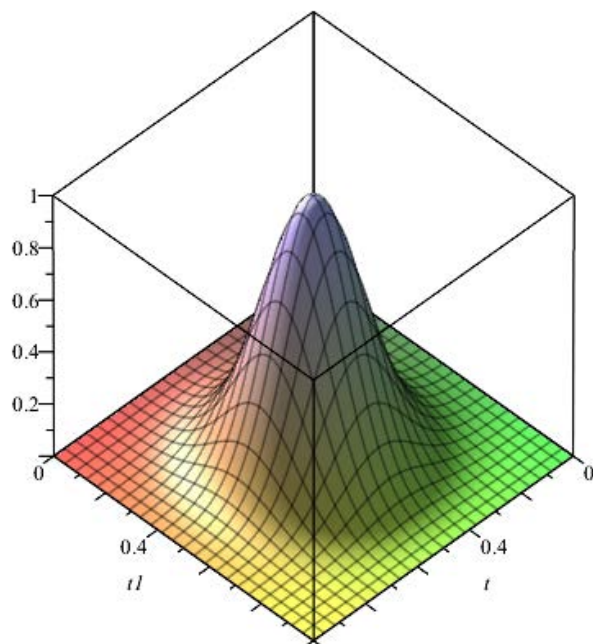


Рис. 1. Заданная диаграмма направленности

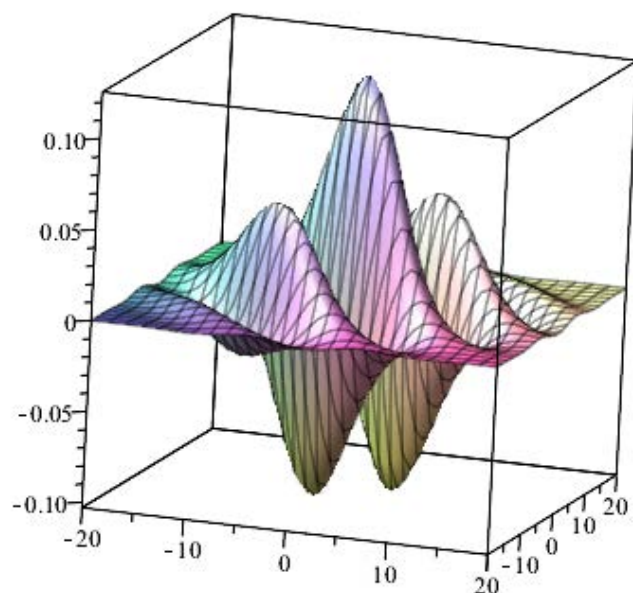


Рис. 2. График действительной части функции $g(\zeta, \eta)$, полученной в аналитическом виде

Применив прямое преобразование Фурье к найденной функции $g(\zeta, \eta)$ получим заданную исходно функцию $h(k_1, k_2)$.

Заключение

Представленный метод позволяет получить аналитическую функцию, синтезирующую антенны с заданной диаграммой направленности. Однако следует отметить, что данный метод позволяет найти функцию $g(\zeta, \eta)$, задающую диаграмму направленности в той же области, в которой была задана функция $h(k_1, k_2)$, в то время как рассмотренные в работе [1] вычислительные схемы позволяют трансформировать область, в которой задана диаграмма направленности в область, в которой задан раскрыв антенны.

В случае же, если требуемая диаграмма направленности задана дискретно, то разработанные и представленные в работе [1] численные алгоритмы показали более высокую эффективность, по сравнению с дискретным преобразованием Фурье (быстрее в 3–4 раза) и быстрым преобразованием Фурье (быстрее на 30–40 %).

Список литературы

1. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М. : Наука, 1962. 220 с. ; 2-е изд. М. : Наука, 1971. 408 с. ; 3-е изд. М. : Либроком, 2010. 416 с.
2. Бойков И. В., Айкашев П. В. К вопросу об анализе и синтезе фрактальных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2018. № 1. С. 92–100.
3. Бойков И. В., Айкашев П. В. Об одном численном методе синтеза фрактальных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 1. С. 51–67.
4. Бойков И. В., Айкашев П. В. Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проволочных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3. С. 127–146.
5. Бойков И. В., Айкашев П. В. Об одном численном методе моделирования фрактальных антенн // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : тр. XI Междунар. конф. / под ред. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. С. 55–61.
6. Бойков И. В., Айкашев П. В. Методы сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в моделировании антенн // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ : тр. междунар. науч. молодежной школы-семинара имени Е. В. Воскресенского / под ред. В. Ф. Тишкина. Саранск : СВМО, 2020. С. 179–190.
7. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : БИНОМ : Лаборатория знаний, 2015. 637 с.

Векторный алгоритм метода декомпозиции области

Милослава Вячеславовна Боженова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева, Самара, Россия
milly.welly007@gmail.com

Аннотация. Предлагается векторный алгоритм метода декомпозиции области, основанный на известном параллельном варианте того же метода. Алгоритм найдет применение в решении сеточных уравнений, по дифференциальному шаблону которых составляется ленточная матрица. Произведена оценка ускорения разработанного алгоритма.

Ключевые слова: векторные алгоритмы, сеточные уравнения, система уравнений, метод декомпозиции области, метод Томаса, векторизация, векторные алгоритмы

Vector algorithm of the domain decomposition method

Miloslava V. Bozhenova

Samara National Research University, Samara, Russia
milly.welly007@gmail.com

Abstract. A vector algorithm for the domain decomposition method is proposed, based on a well-known parallel version of the same method. The algorithm will find application in solving grid equations, the differential template of which is used to form a band matrix. The acceleration of the developed algorithm was estimated.

Keywords: vector algorithms, grid equations, system of equations, domain decomposition method, Thomas method, vectorization, vector algorithms

Введение

Векторные алгоритмы решения систем уравнений известны с работы Дж. Ортеги [1] конца 80-ых годов прошлого века. Широкое внедрение графических процессоров в вычислительную практику дало новый импульс развитию упомянутой предметной области. Так, в недавних работах [2, 3] предлагается векторизация прямых и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений ленточного вида. К сожалению, неспециализированные итерационные алгоритмы, как правило, характеризуются медленной сходимостью, а прямые методы не применяются для решения одиночных систем уравнений на графическом процессоре. Устранению указанного недостатка

прямых методов посвящена предлагаемая работа. Замысел автора – воспользоваться особенностью параллельного алгоритма метода декомпозиции области из [1], где решение одной ленточной системы большой размерности сводится к решению большого числа систем такого же вида малой размерности.

Метод декомпозиции области

Синтезируемый алгоритм строится на основе метода декомпозиции области. Рассмотрим описание данного метода согласно [1, 4]. Метод декомпозиции области ориентирован на параллельные вычисления в силу разбиения исходной матрицы на наборы матриц.

На основе дифференциального шаблона формируется ленточная матрица с диагональным преобладанием. В первую очередь ленточная матрица преобразуется в стреловидную путем разделения искомым узлов сеточного уравнения на группы. Алгоритм начинается с выполнения LU-разложения матриц A_i и решения систем:

$$L_i Y_i = B_i, \quad L_i y_i = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad (1)$$

$$U_i Z_i = Y_i, \quad U_i z_i = y_i, \quad i = \overline{1, p}. \quad (2)$$

Затем формируются произведения $C_i Z_i$, $C_i z_i$, далее – подсчет матрицы $\hat{A}$ (называемой преобразованием Гаусса или дополнением Шура) и вектора $\hat{b}$ по формулам:

$$\hat{A} = A_s - \sum_{i=1}^p C_i Z_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad (3)$$

$$\hat{b} = b_s - \sum_{i=1}^p C_i z_i, \quad i = \overline{1, p}. \quad (4)$$

С помощью полученных значений находится последний блок искомого вектора:

$$\hat{A} x_s = \hat{b}. \quad (5)$$

Далее, согласно методу декомпозиции области, формируются векторы C_i :

$$c_i = b_i - B_i x_s, \quad i = \overline{1, p}, \quad (6)$$

и находятся оставшиеся блоки искомого вектора:

$$A_i x_i = c_i, \quad i = \overline{1, p}. \quad (7)$$

Векторизация метода декомпозиции области

Для векторизации данного метода воспользуемся тем фактом, что параллельный метод декомпозиции области подразумевает разбиение ленточной системы большой размерности на большое число систем меньших размерностей. Приведем векторный алгоритм рассмотренного выше метода. В целях достижения эффективной векторизации первый шаг метода (1)–(2) по нахождению z_i и Z_i реализуется методом векторизованной прогонки:

$$A_i Z_i = B_i, \quad i=1, \dots, p, \quad (8)$$

$$A_i z_i = b_i, \quad i=1, \dots, p. \quad (9)$$

Далее – программная алгоритмизация операций (3)–(7).

Векторизация метода декомпозиции области заключается в использовании векторных операций, предоставленных Matlab: поэлементное умножение и деление. Системы (7)–(9) решаются методом прогонки. Таким образом, появляется возможность ускорить процесс последовательного решения систем, используя векторы прогоночных коэффициентов y , α , β размера p . Фрагмент алгоритма на языке Matlab, выполняющий векторный метод прогонки приведен ниже:

```
y(1, :) = a(1, :);
alpha(1, :) = -c(1, :)./y(1, :);
beta(1, :) = d(1, :)./y(1, :);
for i = 2:n-1
    y(i, :) = a(i, :) + b(i, :).*alpha(i-1, :);
    alpha(i, :) = -c(i, :)./y(i, :);
    beta(i, :) = (d(i, :) - b(i, :).*beta(i-1, :))./y(i, :);
end
y(n, :) = a(n, :) + b(n-1, :).*alpha(n-1, :);
beta(n, :) = (d(n, :) - b(n-1, :).*beta(n-1, :))./y(n, :);
x(n, :) = beta(n, :);
for i = n-1:-1:1
    x(i, :) = alpha(i, :).*x(i+1, :) + beta(i, :);
end
```

С помощью приведенного фрагмента решаются СЛАУ (7)–(9), где используются диагонали матриц A_i и соответствующая правая часть.

Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент производился на центральном процессоре с оперативной памятью Ddr4 Kingston 16 GB и графическом процессоре Rtx 3080 ti с видеопамятью на 12 Гб. Для увеличения достоверности результата производилось несколько запусков с каждым из наборов параметров и вычислялось среднее время по этим запускам.

В ходе исследования времени выполнения векторного алгоритма метода декомпозиции области и его скалярного аналога были получены результаты, приведенные в табл. 1, в соответствии с изменением параметра p – количества решаемых систем. Параметр q отвечает за размерность матриц и подбирается минимальным с целью достижения лучшей векторизации, что было подтверждено исследованием ускорения векторного метода прогонки. Вычисление среднего времени потребовалось из-за большого разброса получаемых данных.

Таблица 1

**Результат выполнения векторного алгоритма
метода декомпозиции области**

Параметр p	Параметр q	Время выполнения программы на CPU	Время выполнения программы на GPU	Ускорение
100	2	0.012с	0.16с	0.075
500	2	1.3с	10с	0.13
900	2	22с	111с	0.2

По полученным данным заметна прямая зависимость ускорения от параметра p : ускорение растет с увеличением данного параметра. Однако, в силу нехватки ресурса видеопамяти, ускорение не достигает единицы. Решением возникшей проблемы служит использование единственной матрицы A вместо набора матриц $A_i A_i$, аналогично с матрицами B_i, C_i . Данная операция возможна в силу использования дифференциального шаблона при формировании ленточной матрицы, а также сохранения логики метода и значительного уменьшения использования видеопамяти. Результаты вычислений с указанным допущением представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Результат выполнения векторного алгоритма метода декомпозиции
области с использованием матриц A, B, C вместо A_i, B_i, C_i**

Параметр p	Параметр q	Время выполнения программы на CPU	Время выполнения программы на GPU	Ускорение
500	2	0.379с	0.339с	1.12
1000	2	2.823с	0.8592с	3.28
2000	2	28.672с	3.7328с	7.68
4000	2	221.234с	14.695с	15.06

В табл. 2 результаты являются оценкой ускорения сверху и тем самым характеризуют алгоритм. Наблюдается рост ускорения и опти-

мальность использования векторизации, поскольку ускорение принимает значение больше единицы уже при $p = 1000p = 1000$. Полученные выводы побуждают к дальнейшему исследованию алгоритма, а именно, реализации его на других языках программирования: Python, CUDA C.

Заключение

Таким образом, представлен векторный алгоритм, полученный из параллельного алгоритма метода декомпозиции области. Подтверждена работоспособность полученного алгоритма путем запусков на GPU в сравнении с запусками того же алгоритма на CPU, произведена оценка ускорения векторного алгоритма. Представленный векторный алгоритм метода декомпозиции области имеет потенциал при написании его на других языках программирования с целью достижения большего ускорения.

Выражаю благодарность своему научному руководителю – профессору Головашкину Д. Л.

Список литературы

1. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М. : Мир, 1991. 364 с.
2. Логанова Л. В., Головашкин Д. Л. Параллельный алгоритм реализации метода встречных циклических прогонок для двумерных сеточных областей // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, № 4. С. 64–71.
3. Губайдуллин Д. А., Никифоров А. И., Садовников Р. В. Использование графических процессоров для решения разреженных СЛАУ итерационными методами подпространств Крылова с предобуславливанием на примере задач теории фильтрации // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 1. С. 205–212.
4. Гурьева Я. Л., Перевозкин Д. В. Вопросы разработки параллельного программного обеспечения для метода декомпозиции области // Вычислительные методы и программирование. 2018. Т. 19, № 3. С. 219–229.

Вычисление интегралов на фракталах

Илья Владимирович Бойков¹,
Алла Ильинична Бойкова²,
Алена Ивановна Дружаева³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹boikov@pnzgu.ru, ²aiboikova@pnzgu.ru, ³druzhaeva1881@gmail.com

Аннотация. Рассматривается применение метода Монте-Карло к вычислению интегралов на фракталах.

Ключевые слова: интегрирование, метод Монте Карло, фракталы

Integration over fractals

Ilya V. Boykov¹, Alla I. Boykova², Alena I. Druzhaeva³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia
¹boikov@pnzgu.ru, ²aiboikova@pnzgu.ru, ³druzhaeva1881@gmail.com

Abstract. The paper is devoted to the application of the Monte Carlo method for calculating integrals over fractals.

Keywords: integration, Monte Carlo mehod, fractals

Введение

Определение 1. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где Γ – неспрямляемая кривая. Отметим, что под Γ может подразумеваться, как кривая в плоскости ОХУ, так и кривая на плоскости комплексной переменной.

Приведем несколько определений интеграла (1).

Вначале приведем определение интеграла (1) в «собственном смысле» (по терминологии работы [1]).

Пусть существует взаимно-однозначное и непрерывное отображение $g(z)$ отрезка $[0,1]$ на кривую Γ . Тогда вычисление интеграла (1) сводится к вычислению интеграла

$$\int_0^1 f(g(x)) dg(x). \quad (2)$$

Определение 2. Пусть Γ – замкнутая неспрямляемая кривая на комплексной плоскости S , разбивающая ее на части D^+ и D^- так, что бесконечно удаленная точка лежит в D^- , и ориентированная положительным образом относительно D^+ . Пусть на Γ задана непрерывная функция $f(z)$, имеющая непрерывное продолжение в $\overline{D^+}$. Тогда интеграл (1) определяется [2] формулой

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = - \int \int_{D^+} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z}. \quad (3)$$

Напомним [3], что оператор $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ определяется формулой

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Согласно формуле (3) вычисление интеграла (1) по замкнутой кривой Γ сводится к вычислению интеграла в правой части формулы (3) по области D^+ , ограниченной кривой Γ . Здесь может быть использован метод Монте-Карло.

Датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1949 г. В этом году появилась работа Метрополиса и Улама [4]. Станислава Уламу, одного из участников «Манхэттенского проекта» и выдающегося математика Джона фон Неймана называют создателями метода Монте-Карло. В методе Монте Карло отмечают две характерные особенности.

Первая – это простота структуры его вычислительного алгоритма. Для осуществления одного испытания составляется одна программа. Затем уже имеющаяся программа независимо повторяется для каждого из N испытаний. Далее результаты осредняются.

Вторая особенность заключается в том, что ошибка вычислений, как правило, пропорциональна $\sqrt{D/N}$, где D – некоторая константа, как правило принимается дисперсия случайной величины, используемой при построении алгоритма, а N – число испытаний. Очевидно, что точность вычислений по методу Монте-Карло не очень высокая и поэтому его применяют или в случае, когда нужна не очень высокая точность, или в случае, когда применение стандартных детерминированных методов практически невозможно из-за чрезмерной сложности исследуемой задачи.

Отметим, что задача вычисления интегралов на фракталах относится к последнему случаю.

Вычисление интегралов на фракталах

В работах [5, 6] методом Монте-Карло вычислена площадь множества Мандельброта. Отметим, что вычислению площади множества Мандельброта посвящено множество работ, в которых развиваются различные методы [7, 8], в том числе метод Монте-Карло. В работе [7] для вычисления площади множества Мандельброта построен аналитический метод, опирающийся на теорему Пика (Pick) [9]. Значение площади множества Мандельброта вычисленное этим методом с точностью до 4-х знаков после запятой, равно 1.5052, что, как пишут авторы близко к значениям, полученным другими методами. Отметим, что в работе [5] методом Монте-Карло получены значения площади множества Мандельброта, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Площадь фрактала Мандельброта

Число точек	Число итераций	Площадь	Среднее значение площади фрактала	Средне-квадратичное отклонение площади фрактала
10000	100000	1.475625, 1.53, 1.4837499, 1.5149999, 1.51125	1.503125	0.02030240
10000	10000	1.526875, 1.50812499, 1.528125, 1.535625, 1.44625	1.509	0.032657312
10000	1000	1.53125, 1.51125, 1.55375, 1.480625, 1.492499	1.513875	0.02631
10000	100	1.50875, 1.523749, 1.5175, 1.5181249, 1.595625	1.53275	0.031801

Таким образом, метод Монте-Карло позволяет вычислить площадь фракталов с достаточно высокой точностью. Это необходимо для построения кубатурных формул вычисления интегралов на фракталах. Вычислим интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy, \quad (4)$$

где G – ограниченная область с фрактальной границей $\Gamma = \partial G$, $f(x, y)$ – кусочно-непрерывная ограниченная функция $|f(x, y)| \leq M$.

Метод вычисления интеграла заключается в следующем. Вычислим площадь области $G: S = \text{mes} G$. Пусть область G находится в квадрате Ω_0 . В области Ω_0 используем равномерное распределение.

Проведем N испытаний, последовательно определяя точки $V_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, равномерно распределенные в области Ω_0 . Запишем формулу приближенного вычисления интеграла

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \kappa \sum_{k=1}^N f(x_k, y_k) + R_N,$$

где $\sum^*$ означает суммирование по k таким, что $V_k \in G$. Пусть $\sum_{k=1}^N 1 = n^*$. Тогда в качестве весового множества следует взять $\kappa = s / n^*$.

Замечание. Полагая здесь $f(x, y) = 1$, вычисляем площадь фрактала G .

Вычисление слабосигулярных интегралов

В данном разделе предлагается кубатурная формула вычисления многомерных слабосингулярных интегралов на фракталах. Кубатурная формула построена с использованием метода Монте-Карло. Использование метода Монте-Карло позволяет вычислять многомерные интегралы, определенные в областях, ограниченных непрямыми кривыми и фракталами. Отметим, что в большинстве известных авторам работ (достаточно подробная библиография приведена в [10, 12]) исследуются приближенные методы вычисления слабосингулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегралов, определенных только на параллелепипедах.

Рассмотрим интеграл

$$\iint_G \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^\lambda} dx_1 dx_2, \quad (5)$$

где G – область с непрямой границей $\Gamma = \partial G$, $0 < \lambda < 2$. Начало координат находится внутри области G .

Пусть область G расположена в квадрате G_0 . Построим в G_0 равномерное распределение случайных значений (x_1, x_2) . Алгоритм вычисления интеграла (5) заключается в следующем.

Обозначим через $B(0, R)$ круг с центром в начале координат, внутри которого находится область G . Отметим, что начало координат является особой точкой интеграла (5). Не ограничивая общности можно считать, что $B(0, R)$.

Обозначим через $g_k, k = 1, 2, \dots, n$, области

$$g_k = \{(x_1, x_2) : \rho_{k-1} \leq (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < \rho_k, k = 1, 2, \dots, n,$$

где $\rho_k = \frac{kR}{n}, k = 0, 1, \dots, n$.

Обозначим через N число узлов, участвующих в сессии, через N_k – число узлов, попавших в область $g_k, k=1, 2, \dots, n$.

Вычисление интеграла (5) проводится по формуле

$$\iint_G \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^\lambda} dx_1 dx_2 = \sum_{k=2}^n \frac{s_k}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{f(v_j)}{((x_1^j)^2 + (x_2^j)^2)^\lambda} + R_N(f),$$

где $v_j = (x_1^j, x_2^j), j = 1, 2, \dots, N$, $\sum'$ – суммирование по узлам v_j , попавших в область $g_k \cap G, k = 1, 2, \dots, n$, s_k – площадь области $g_k, k = 1, 2, \dots, n$, $R_N(f)$ – погрешность кубатурной формулы.

Выводы

В работе предложены кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов в смысле Римана и многомерных слабосингулярных интегралов со степенной особенностью. Способ построения кубатурных формул может быть распространен на слабосингулярные интегралы с особенностями, отличными от степенных, а также на сингулярные и гиперсингулярные интегралы.

Список литературы

1. Кац Б. А. Интеграл Стильтьсса по фрактальному контуру и некоторые его приложения // Известия высших учебных заведений. Математика. 2000. № 10. С. 21–32.
2. Harrison J. Stokes theorem for nonsmooth chains // Bul. Amer. Mat. Soc. 1993. Vol. 29, № 2. P. 235–242.
3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М. : Наука. 1988. 512 с.
4. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo method // J. Amer. statistic assoc. 1949. Vol. 44, № 247. P. 335–34.
5. Бойкова А. И., Елпатова В. С. Применение методов Монте-Карло к вычислению интегралов на фракталах // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XIII Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 4–6 декабря 2018 г.). Пенза, 2018. С. 27–32.
6. Бойкова А. И., Елпатова В. С. Применение методов Монте-Карло к вычислению интегралов на фракталах. I // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XIII Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 3–6 июня 2019 г.). Пенза, 2019. С. 83–88.
7. Andreadis I., Karakasidis T. E. On a numerical approximation of the boundary structure and of the area of the Mandelbrot set // Nonlinear Dyn. 2015. Vol. 80. P. 929–935. doi: 10.1007/s11071-015-1917-4
8. Farris S. M. Generalized Mandelbrot Sets of a Family of Polynomials $P_n(z) = z^n + z + c; (n \geq 2)$ // Hindawi International Journal of Mathematics and

9. Varberg D. E. Pick's Theorem Revisited // The American Mathematical Monthly. 1985. Vol. 92, № 8. P. 584–587. doi: 10.1080/00029890.1985
10. Бойков И. В. Оптимальные методы приближенного вычисления интегралов и приближенное решение интегральных уравнений : учеб. пособие. Пенза : Изд-во Пенз. политех. ин-та, 1981. 105 с.
11. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть первая. Сингулярные интегралы. Пенза : Изд-во ПГУ, 2005. 360 с.
12. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть вторая. Гиперсингулярные интегралы. Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. 252 с.

Некоторые методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений

Юлия Фридриховна Захарова¹,
Олег Владимирович Захаров²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
²olegzakharov@rambler.ru

Аннотация. Рассматриваются и обосновываются сплайн-коллокационные методы (со сплайнами первого порядка) решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегралы, интегральные уравнения, метод коллокации

Some methods for solving hypersingular integral properties

Yulia F. Zakharova¹, Oleg V. Zakharov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia
²olegzakharov@rambler.ru

Abstract. Spline-collocation methods (with splines of the first order) for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations are considered and substantiated.

Keywords: hypersingular integrals, integral equations, collection method

Численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений принадлежат к одному из наиболее активно развивающихся направлений вычислительной математики. В первую очередь это обусловлено многочисленными приложениями гиперсингулярных интегральных уравнений к задачам аэродинамики, электродинамики, ядерной физики. Приближенному решению линейных гиперсингулярных интегральных уравнений посвящено большое число работ, в которых предложены и обоснованы различные численные методы. Подробные обзоры этих методов даны в [1–4].

Данная статья посвящена построению и обоснованию сплайн-коллокационных методов, со сплайнами первого порядка, решения линейных гиперсингулярных интегральных уравнений

$$a(t)x(t) + \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau, x(\tau))}{(\tau - t)^p} d\tau = f(t), \quad t \in \gamma, p = 2, 3, \dots,$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат в плоскости комплексной переменной z . Определения гиперсингулярных интегралов приведены в [1].

Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегро-дифференциальных уравнений

Рассмотрим гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^m a_k(t)x^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^l \int_{\gamma} \frac{h_k(t, \tau)x^{(k)}(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau = f(t), \quad (1)$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат; p – натуральное число, $p = 2, 3, \dots$

В качестве граничных условий в уравнении (1) возьмем следующие

$$\int_{\gamma} x(t)t^{-k-1}dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, v-1, \quad (2)$$

где $v = \max(m, l)$.

Будем считать, что коэффициенты и правая часть уравнения (1) удовлетворяют одному из следующих условий:

1) $a_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, m$, $f(t) \in H_{\alpha}$, $h_k(t, \tau)$ – удовлетворяет условию Гельдера H_{α} по первой переменной и принадлежит классу функций $W^{p-1}H_{\alpha}$ по второй переменной, $0 < \alpha \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, l$;

2) $a_k(t)$, $f(t) \in W^r H_{\alpha}$, $k = 0, 1, \dots, m$, $h_k(t, \tau)$ – принадлежит классу функций $W^r H_{\alpha}$ по первой переменной и классу функций $W^{r+p-1}H_{\alpha}$ по второй переменной, $0 < \alpha \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, l$.

Кроме того, будем считать, что функции $a_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, m$, $h_k(t, \tau)$, $k = 0, 1, \dots, l$, $f(t)$ периодические с периодом 2π по всем переменным.

Через $Y = H_{\beta}$, $(0 < \beta < \alpha)$ обозначим банахово пространство функций $x(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем β , с нормой

$$\|x(t)\|_Y = \|x(t)\|_{H_{\beta}} = \max_{t \in \gamma} |x(t)| + \sup_{(t_1, t_2) \in \gamma, t_1 \neq t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\beta}}.$$

Через X обозначим банахово пространство функций непрерывно дифференцируемых до s -го порядка, производные s -го порядка которых удовлетворяют условию Гельдера H_{α} . Норма в пространстве X вводится формулой

$$\|x(t)\|_X = \sum_{k=0}^s \max_{t \in \gamma} |x^{(k)}(t)| + \sup_{(t_1, t_2) \in \gamma, t_1 \neq t_2} \frac{|x^{(s)}(t_1) - x^{(s)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Пусть $s = \max(m, l + p - 1)$. Тогда приближенное решение граничной задачи (1)–(2) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^{k+s} + \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k. \quad (3)$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, которая в операторной форме имеет вид

$$K_n x_n \equiv P_{nn}^t \left[\sum_{k=0}^n a_k(t) x_n^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^l \int_{\gamma} P_n^\tau \left[\frac{h_k(t, \tau) x_n^{(k)}(\tau)}{(\tau - t)^p} \right] d\tau \right] = \\ = P_n^t [f(t)]. \quad (4)$$

Здесь $P_n^t \left(\overline{P_n^\tau} \right)$ – оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов по узлам $t_k = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi / (2n+1)$ ($\bar{t}_k = e^{i\bar{s}_k}$, $\bar{s}_k = (2k+1)\pi / (2n+1)$), $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Теорема 1. Пусть краевая задача (1)–(2) однозначно разрешима и выполнены условия 1. Тогда при n таких, что $q = A \ln^2 n / n^{\alpha-\beta}$ система уравнений (4) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_{H_\beta} \leq A \ln^2 n / n^{\alpha-\beta}$, где x^* и x_n^* – решение краевой задачи (1)–(2) и системы уравнений (4), соответственно.

Таким образом, если оператор $K \in [X, Y]$ при граничных условиях (2) непрерывно обратим, то при n таких, что $q = A \ln n / n^{\alpha-\beta} < 1$, оператор $\tilde{K}_n \in [X_n, Y_n]$ непрерывно обратим.

Здесь через $X_n \subset X$ обозначено множество полиномов вида (3) с нормой пространства X , а через Y_n обозначено множество полиномов вида $\sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k$ с нормой пространства Y . (Напомним, что символом $[X, Y]$ обозначается множество линейных ограниченных операторов, отображающих нормированное пространство X в нормированное пространство Y).

Доказательство теоремы проведем в два этапа. Вначале проведем обоснование метода коллокации, а затем перейдем к методу механических квадратур, рассматривая его как возмущение метода коллокации.

Метод коллокации в операторной форме имеет вид

$$\tilde{K}_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[\sum_{k=0}^m a_k(t) x_n^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^l \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h_k(t, \tau) x_n^{(k)}(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau \right] = \bar{P}_n [f(t)]. \quad (5)$$

Пользуясь определением гиперсингулярного интеграла, приведем, следуя [5], краевую задачу (1)–(2) и уравнение (5) к эквивалентному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению и аппроксимирующей последнее по методу коллокации системе уравнений. В результате имеем

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^m a_k(t) x^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^l \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{(h_k(t, \tau) x^{(k)}(\tau))_{\tau}^{(p-1)}}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[\sum_{k=0}^m a_k(t) x_n^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^l \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{(h_k(t, \tau) x_n^{(k)}(\tau))_{\tau}^{(p-1)}}{\tau - t} d\tau \right] = \\ = \bar{P}_n [f(t)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь через $(h(t, \tau) x(\tau))_{\tau}^{(p-1)}(\tau)$ обозначена производная $(p-1)$ порядка по переменной τ .

Продолжим преобразование уравнений (6)–(7). Очевидно,

$$\begin{aligned} Kx \equiv \sum_{k=0}^m a_k(t) x^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{h_l(t, \tau) x^{(l+p-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ + \sum_{k=0}^{l+p-2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h_k^*(t, \tau) x^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[\sum_{k=0}^m a_k(t) x_n^{(k)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{h_l(t, \tau) x_n^{(l+p-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{l+p-2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h_k^*(t, \tau) x_n^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] = \bar{P}_n [f(t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь через $h_k^*(t, \tau)$, $k = 0, 1, \dots, l + p - 2$, обозначены функции, построение которых очевидно.

Уравнения (8) и (9) удобно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} Kx \equiv \sum_{k=0}^s \left[a_k(t) x^{(k)}(t) + b_k(t) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^{(k)}(\tau) d\tau}{\tau - t} + \right. \\ \left. + \int_{\gamma} b_k(t, \tau) x^{(k)}(\tau) d\tau \right] = f(t), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tilde{K}_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[\sum_{k=0}^s \left[a_k(t) x_n^{(k)}(t) + b_k(t) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x_n^{(k)}(\tau) d\tau}{\tau - t} + \int_{\gamma} b_k(t, \tau) x_n^{(k)}(\tau) d\tau \right] \right] = \bar{P}_n [f(t)]. \quad (11)$$

Здесь при $m < s$ коэффициенты $a_k(t) \equiv 0$, $k = m+1, m+2, \dots, s$; при $l + p - 1 < s$ коэффициенты $b_k(t) \equiv 0$, $k = l + p, l + p + 1, \dots, s$.

Коэффициент $b_{l+p-1}(t) = \frac{h_l(t, t)(-1)^{p-1}}{(p-1)!}$, построение коэффициентов $b_k(t)$, $b_k(t, \tau)$, $k = 0, 1, \dots, s$, очевидно.

Преобразования, которые привели граничную задачу (1), (2) к граничной задаче (10), (2) тождественны. Граничные условия (2) выполнены для полиномов (3).

Таким образом, задача обоснования метода коллокации для краевой задачи (1)–(2) сведена к обоснованию метода коллокации (11) для сингулярного интегро-дифференциального уравнения (10) с граничными условиями (2).

Метод коллокации для линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений обоснован в работе И. В. Бойкова и И. И. Жечева [6] (см. достаточно подробное изложение в [7]). Из результатов этих работ следует, что при n таких, что $q = A \ln n / n^{\alpha-\beta} < 1$, система уравнений (11) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^{**}\| \leq A \ln n / n^{\alpha-\beta}$, где x^* и x_n^{**} – решение краевой задачи (1), (2) и системы уравнений (11), соответственно.

Так как система уравнений (11) получена из системы уравнений (7) тождественными преобразованиями, то при указанных выше значениях n система уравнений (9) однозначно разрешима и функция x_n^{**} является ее решением.

Для обоснования метода механических квадратур (4) оценим норму разности операторов $\tilde{K}_n$ и K_n в метрике пространства Y_n .

Очевидно,

$$\|K_n x_n - \tilde{K}_n x_n\|_{Y_n} = \|\bar{P}_n \left[\sum_{k=0}^l \int_{\gamma} R_n \left[\frac{h_k(t, \tau) x_n^{(k)}(\tau)}{(\tau - t)^p} \right] d\tau \right]\|_{Y_n} \quad (12)$$

где $R_n = I - P_n$, I – тождественный оператор.

Оценивая норму данного оператора, получаем, что

$$\|K_n x_n - \tilde{K}_n x_n\|_Y \leq A n^{-(\alpha-\beta)} \ln^2 n \|x_n\|_X \quad (13)$$

Из оценки (13) следует, что при n таких, что $q = An^{-(\alpha-\beta)} \ln^2 n < 1$, оператор K_n имеет левый обратный. Так как оператор K_n действует из конечномерного пространства X_n в конечномерное пространство Y_n , то из существования левого обратного оператора следует существование обратного оператора K_n^{-1} .

Теорема 2. Пусть краевая задача (1)–(2) однозначно разрешима и выполнено условие 2). Тогда при n таких, что $A \ln^2 n / n^{r-p+1+\alpha-\beta} < 1$, система уравнений (4) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_{H_\beta} \leq A \ln^2 n / n^{r-p+1+\alpha-\beta}$.

Рассмотрим еще одну вычислительную схему.

Дано гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau)x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} = f(t), \quad t \in \gamma,$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат в плоскости комплексной переменной, $p = 2, 3, \dots$; $a(t), f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$; функция $h(t, \tau)$ принадлежит классу Гельдера H_α по первой переменной и имеет производные до $p-1$ порядка по второй переменной, причем $\frac{\partial^{p-1} h(t, \tau)}{\partial \tau^{p-1}} \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.

Введем пространство X функций $x(t)$, $t \in \gamma$, $x(t) \in W^{p-1}H_\beta$, $\beta < \alpha$, с нормой

$$\|x(t)\| = \sum_{k=0}^{p-1} \|x^{(k)}(t)\|_{C(\gamma)} + \sup_{t_1 \neq t_2; t_1, t_2 \in \gamma} \frac{|x^{(p-1)}(t_1) - x^{(p-1)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Через Y обозначим пространство функций $y(t)$, $t \in \gamma$, $y(t) \in H_\beta$, $\beta < \alpha$, с нормой

$$\|y(t)\| = \|y(t)\|_{C(\gamma)} + \sup_{t_1 \neq t_2; t_1, t_2 \in \gamma} \frac{|y(t_1) - y(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Известно, что пространства X и Y – банаховы.

Из определения гиперсингулярных интегралов и теории сингулярных операторов следует, что оператор K отображает пространство X в Y .

Будем считать, что K имеет линейный непрерывный обратный оператор $K^{-1} \in [Y, X]$.

Обозначим через X_n подпространство пространства X , состоящее из функций

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_k t^k \ln t + \sum_{k=p-1}^{n+p-1} \alpha_k t^k + \sum_{k=-n+p-1}^{-1} \alpha_k t^k,$$

а через Y_n подпространство пространства Y , состоящее из полиномов

$$y_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k.$$

Введем узлы $t_k = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi / (2n+1)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$ и через $P_n[f]$ обозначим оператор проектирования непрерывных функций $f \in C(\gamma)$ на множество интерполяционных полиномов n -го порядка, построенных на узлах t_k , $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_k t^k \ln t + \sum_{k=p-1}^{n+p-1} \alpha_k t^k + \sum_{k=-n+p-1}^{-1} \alpha_k t^k,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются по методу коллокации из системы линейных алгебраических уравнений, представимых в операторном виде уравнением

$$K_n x_n \equiv P_n \left[a(t) x_n(t) + \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} \right] = P_n[f(t)].$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [10]. Пусть оператор $K \in [X, Y]$ непрерывно обратим: $a_1, f \in H_{\alpha}$, $h(t, \tau) \in H_{\alpha\alpha}$. Тогда при n таких, что $q = C \ln^2 n / n^{\alpha-\beta} < 1$, система уравнений (3) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq \frac{C \ln^2 n}{n^{\alpha-\beta}}$, где x^* – решение уравнения (1).

Список литературы

1. Бойков И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Динамические системы. 2019. Т. 9 (37), № 3. С. 244–272.
2. Boykov I. V., Ventsel E. S., Roudnev V. A., Boykova A. I. An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations // Applied Numerical Mathematics. 2014. Vol. 86. P. 1–21.
3. Boykov I. V., Roudnev V. A., Boykova A. I., Baulina O. A. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations // Applied Numerical Mathematics. 2018. Vol. 127. P. 280–305.
4. Boykov I. V. Approximate Methods for Solving Hypersingular integral Equations // Topics in Integral and Integro-Difference Equations. Theory and

Applications. Editors Harenfra Singh, Hemen Dutta, Marcelo M. Cavalcanti. Springer, 2021. P. 63–102.

5. Бойков И. В., Захарова Ю. Ф. Приближенное решение гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2010. № 1. С. 80–90.
6. Бойков И. В., Жечев И. И. К приближенному решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 1 [линейные уравнения] // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 8. С. 1493–1502.
7. Бойков И. В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. 316 с.
8. Бойков И. В., Бойкова А. И. Сплайн-коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Вестник Харьковского национального университета. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. 2007. № 3. С. 36–49.
9. Бойков И. В., Захарова Ю. Ф. Оптимальные методы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 1. С. 3–21.
10. Бойков И. В., Захарова Ю. Ф., Семов М. А., Есафьев А. А. Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокаций // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2014. № 3. С. 101–113.

**Моделирование процесса теплопереноса
в неоднородном стержне в задаче
с обратным временем**

**Татьяна Владимировна Грунина¹,
Данила Геннадьевич Нестеров²**

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹eliseevat@mail.ru

Аннотация. Рассматривается решение ретроспективной задачи теплопроводности для полуограниченного неоднородного стержня.

Ключевые слова: ретроспективная задача, теплопроводность, условия сопряжения

**On the question of teaching methods for solving integral equations
in the preparation of bachelors**

Tatiana V. Grunina¹, Danila G. Nesterov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia
¹eliseevat@mail.ru

Abstract. The solution of the retrospective problem of heat conduction for a semi-bounded inhomogeneous rod is considered.

Keywords: retrospective problem, heat conduction, pairing conditions

Прикладные проблемы приводят к необходимости решения краевых задач для уравнений с частными производными. Разработка приближенных методов их решения базируется на построении и исследовании численных методов решения краевых задач для модельных уравнений математической физики.

Обратные задачи математической физики часто принадлежат к классу некорректных в классическом смысле задач. Некорректность обусловлена, прежде всего, отсутствием непрерывной зависимости решения от входных данных. В этом случае нужно сужать класс допустимых решений и использовать специальные регуляризирующие процедуры для нахождения устойчивого решения [1].

В работе применяется метод операторов преобразований и итерационный метод для численного решения ретроспективной задачи теплопроводности в двуслойном полуограниченном стержне.

Пусть функция $u(x, t) = \theta(x)\theta(l-x)u_1(x, t) + \theta(x-l)u_2(x, t)$ в области $D_1 = \{(x, t) \mid x \in (0; l) \cup (l; +\infty); t \in (0; +\infty)\}$ удовлетворяющая уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

условию в известный момент времени $t = T$

$$u_i(x, T) = f_i(x), \quad (2)$$

граничному условию вида

$$u_1(0, t) = \mu(t) \quad (3)$$

и условиям сопряжения

$$u_1(l, t) = u_2(l, t), \quad k \frac{\partial u_1}{\partial x}(l, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(l, t), \quad k > 0, \quad (4)$$

где $u_1(l, t)$, $u_2(l, t)$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}(l, t)$, $\frac{\partial u_2}{\partial x}(l, t)$ – предельные значения функции $u = u(x, y)$ и ее производных при $x = l$ слева и справа соответственно.

Требуется найти распределение температуры в начальный момент времени

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \theta(x)\theta(l-x)\varphi_1(x) + \theta(x-l)\varphi_2(x)$.

Примем $\mu(t) \equiv 0$.

Для решения поставленной задачи (1) – (4) рассмотрим модельную задачу в области $D = \{(x, t) \mid x \in (0; +\infty); t \in (0; +\infty)\}$. Пусть функция $\tilde{u}(x, t)$ в области D удовлетворяет уравнению $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}$ при соответствующих условиях $\tilde{u}(x, T) = \tilde{f}(x)$, $\tilde{u}(0, t) = 0$. Необходимо определить распределение температур в начальный момент времени $\tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}(x)$. Известно, что решение модельной задачи сводится к интегральному уравнению [2]:

$$\hat{u}(x, T) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4T}} \right] \tilde{\varphi}(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Операторы преобразования, связывающие функции $u(x, t)$ и $\tilde{u}(x, t)$ при условиях $u(0, t) = \tilde{u}(0, t)$ и (4), имеют вид [3]:

$$u(x, t) = \Pi_x[\tilde{u}(x, t)] = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^i \left(\tilde{u}(x+2li, t) - \frac{1-k}{1+k} \tilde{u}(2l-x+2li, t) \right), & 0 < x < l; \\ \frac{2k}{1+k} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^i \tilde{u}(x+2li, t), & x > l. \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи (1) – (4) сводится к решению системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^i \left(\int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(x+2li-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(x+2li+\xi)^2}{4T}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1-k}{1+k} \left(e^{-\frac{(2l-x+2li-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(2l-x+2li+\xi)^2}{4T}} \right) \right] \Pi_x^{-1}[\varphi(\xi)] d\xi \right) = f_1(x); \\ \frac{k}{(1+k)\sqrt{\pi T}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^i \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(x+2li-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(x+2li+\xi)^2}{4T}} \right] \Pi_x^{-1}[\varphi(\xi)] d\xi = f_2(x), \end{cases}$$

где Π_x^{-1} – операторы преобразования, обратные к Π_x [3].

Далее воспользуемся операторным методом и сведем нашу задачу для неоднородной среды к задаче для однородной области, т.е. к уравнению (5) относительно неизвестной $\tilde{\varphi}(\xi)$. Затем по известному решению модельной задачи получим решение исходной краевой задачи в кусочно-однородной полуплоскости, применив операторы преобразования Π_x .

Для решения интегрального уравнения (5) была применена итерационная схема [4]

$$x_{n+1} = x_n - \gamma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b h(t-\tau) x_n(\tau) d\tau - f(t), \quad t \in [a, b], \quad n = 0, 1, \dots,$$

где γ выбирается из условия $\sup_{-\infty < \omega < +\infty} |1 - \gamma H^*(\omega)| \leq 1$.

Список литературы

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие. 3-е изд. М. : Изд-во ЛКИ, 2009. 480 с.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Изд-во МГУ : Наука, 2004. 798 с.
3. Яремко О. Э., Елисеева Т. В. Операторы преобразования в теории смешанных краевых задач кусочно-однородных структур // Труды Средневолжского математического общества. 2005. Т. 7, № 1. С. 223–231.
4. Бойков И. В. Итерационные методы решения уравнений в свертках // Известия вузов. Математика. 1998. С. 8–15.

Приближенные методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений

Наталья Юрьевна Кудряшова¹,
Наталья Валентиновна Мойко²,
Иван Геннадьевич Гришин³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹math.kudryashova@yandex.ru, ²nataliyavalentinovna@yandex.ru,

³iw.gri1234@gmail.com

Аннотация. Исследуются приближенные методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши на замкнутых контурах и отрезках в комплексной плоскости. К решению нелинейных интегральных уравнений применяется вычислительная схема метода Ньютона – Канторовича. Получены достаточные условия сходимости и оценка погрешности приближенного метода.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, интеграл типа Коши, ядро Гильберта, метод Ньютона – Канторовича, производная Фреше, квадратурная формула, теорема Адамара

Approximate methods for solving nonlinear singular integral equations

Natalya Yu. Kudryashova¹, Natalya V. Moiko², Ivan G. Grishin³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹math.kudryashova@yandex.ru, ²nataliyavalentinovna@yandex.ru,

³iw.gri1234@gmail.com

Abstract. Approximate methods for solving nonlinear singular integral equations with a Cauchy-type kernel on closed contours and segments of the complex plane are investigated. The computational scheme of the Newton-Kantorovich method is applied to the solution of nonlinear integral equations. Sufficient convergence conditions and an estimate of the error of the approximate method are obtained.

Keywords: singular integral equation, Cauchy integral, Hilbert kernel, Newton-Kantorovich method, Frechet derivative, quadrature formula, Hadamard theorem

Приближенным методам решения сингулярных интегральных уравнений посвящено большое число работ. Одним из классических приближенных методов решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений является метод Ньютона-Канторовича.

Рассмотрим нелинейное сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши:

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{b(t, \tau, x(\tau))}{\tau - t} d\tau + \int_{\gamma} h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t), \quad (1)$$

где γ -единичная окружность с центром в начале координат на комплексной плоскости

К уравнению (1) применим преобразование Гильберта. Для простоты обозначений будем рассматривать уравнение

$$ax + Sx \equiv a(s)x(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(s, \sigma, x(\sigma)) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} h(s, \sigma, x(\sigma)) d\sigma = f(s). \quad (2)$$

Будем предполагать, что $x(s) \in H_\alpha$, $b'_3(s, \sigma, u) \in H_{\alpha, \alpha, \alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, где b'_3 – производная по третьей переменной.

Построим вычислительную схему для решения уравнения (2). Выберем две системы узлов: $s_k = \frac{\pi k}{n}$, $s_k^* = s_k + h$, $0 < h < \frac{\pi}{2n}$, $k = 0, \dots, 2n$.

Решение будем искать в виде тригонометрического полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \psi_k(t),$$

$$\text{где } \psi_k(t) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(s - s_k)}{\sin \frac{s - s_k}{2}}.$$

Построим квадратурную формулу для вычисления сингулярного интеграла в уравнении (2) при $s \in (s_j, s_{j+1})$. Она будет иметь вид

$$Sx = R_n + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} b(s, s_k^*, x(s_k^*)) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma, \quad (3)$$

где оценка погрешности квадратурной формулы имеет вид:

$$|R_n| \leq An^{-\alpha} \ln n.$$

К уравнению (2) применим метод механических квадратур, воспользовавшись квадратурной формулой (3) для сингулярного интеграла и квадратурной формулой прямоугольников для регулярного интеграла, принимая за узлы коллокации s_k^* , $k = 0, \dots, 2n-1$. При этом получим систему нелинейных алгебраических уравнений следующего вида

$$a(s_j^*)x(s_j^*) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} b(s, s_k^*, x(s_k^*)) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma +$$

$$+\frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} h(s_j^*, s_k^*, x(s_k^*)) = f(s_j^*), j = 0, \dots, 2n-1. \quad (4)$$

Воспользуемся методом Ньютона-Канторовича для решения системы (4).

Пусть P_n оператор, проектирующий пространство $X = H_\beta$, ($0 < \alpha < \beta$) на пространство R_{2n} интерполяционных многочленов по узлам s_k^* , $k = 0, \dots, 2n-1$. Обозначим через K_n оператор, описываемый системой уравнений (4) в пространстве R_{2n} , а через K оператор, описываемый уравнением (2) в пространстве X .

Построим итерационные процессы для решения уравнения (2) и системы (4).

$$x_{m+1} = x_m - [K'(x_0)]^{-1} K(x_m), m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$\tilde{x}_{m+1} = \tilde{x}_m - [K'_n(\tilde{x}_0)]^{-1} K_n(\tilde{x}_m), m = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Здесь K' – производная по Фреше оператора K в пространстве X , K'_n – производная по Фреше оператора K_n в пространстве R_{2n} , x_0 и $\tilde{x}_0$ – начальные приближения.

Приведем итерационный процесс (6) к следующему виду

$$K'_n(\tilde{x}_0)\tilde{x}_{m+1} = K'_n(\tilde{x}_0)\tilde{x}_m - K_n\tilde{x}_m \quad (7)$$

Уравнение (7) на каждом шаге итерационного процесса определяет систему линейных алгебраических уравнений вида

$$Cx = g, \quad (8)$$

где вектор $g = K'_n(\tilde{x}_0)\tilde{x}_m - K_n\tilde{x}_m$, матрица $C = K'_n(\tilde{x}_0)$.

Пользуясь теоремой Адамара [2], нетрудно убедиться, что выбором параметра h , удовлетворяющего неравенству

$$\left| a_j + \frac{b_{jj}}{\pi} \ln \left| \frac{\sin(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2})}{\sin \frac{h}{2}} \right| + \frac{\pi h_{jj}}{n} \right| > A + B \ln n, \quad (9)$$

где A и B – вполне определенные константы, зависящие от функций $b'_3(s, \sigma, \tilde{x}_0(\sigma))$, $h'_3(s, \sigma, \tilde{x}_0(\sigma))$, $a_j = a(s_j^*)$, $b_{jk} = b'_3(s_j^*, s_k^*, \tilde{x}_0(s_k^*))$, $h_{jk} = h'_3(s_j^*, s_k^*, \tilde{x}_0(s_k^*))$, $j, k = 0, \dots, 2n-1$, можно добиться того, чтобы система (8) имела единственное решение на каждой итерации $m = 0, 1, 2, \dots$

Теорема 1. Пусть уравнение (2) имеет единственное решение $x^*(s) \in H_\alpha$, и пусть функции $a(s)$, $f(s) \in H_\alpha$, $b'_3(s, \sigma, u) \in H_{\alpha, \alpha, \alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда при таких значениях h , что выполнены условия (9),

система уравнений (8) на каждом шаге итерационного процесса имеет единственное решение, и итерационный процесс (7) сходится к точному решению уравнения (2) и справедлива оценка

$$\|x^* - \tilde{x}_m\| \leq \frac{B}{1-q} \frac{\ln n}{n^\alpha} + \frac{q^m}{1-q} \|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0\|.$$

Рассмотрим нелинейное сингулярное интегральное уравнение на отрезке вида

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{b(t, \tau, x(\tau))}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1, \quad (10)$$

где $f(t), a(t), b(t), x(t) \in H_\alpha$.

Выберем узлы

$$t_k = -1 + \frac{k}{n}, \quad k = 0, \dots, 2n, \quad t_j^* = t_j + h, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad t_j^* = t_{j+1} - h, \\ j = n, n+1, \dots, 2n-2, \quad 0 < h < \frac{1}{2n}.$$

Приближенное решение уравнения (10) будем искать в виде интерполяционного многочлена $x_n(t)$, определяемого формулой

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{2n-2} x(t_k^*) l_k(t),$$

где $l_k(t)$ – фундаментальные многочлены Лагранжа.

К уравнению (10) применим метод механических квадратур, принимая за узлы коллокации t_k^* , $k = 1, \dots, 2n-2$. При этом получим систему нелинейных алгебраических уравнений следующего вида

$$a(t_j^*)x(t_j^*) + \frac{1}{\pi} \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{b(t_j^*, t_1^*, x(t_1^*))}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=2, k \neq j-1, j+1}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{b(t_j^*, t_k^*, x(t_k^*))}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{b(t_j^*, t_{2n-2}^*, x(t_{2n-2}^*))}{\tau - t_j^*} d\tau \right) = f(t_j^*), \quad j \neq 1, 2, 2n-2, 2n-3, \quad (11)$$

при остальных значениях j уравнения имеют аналогичный вид.

Итерационные процессы для решения уравнения (10) и системы (11) будут иметь вид

$$x_{m+1} = x_m - [K'(x_0)]^{-1} K(x_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$\tilde{x}_{m+1} = \tilde{x}_m - [K'_n(\tilde{x}_0)]^{-1} K_n(\tilde{x}_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Здесь K' – производная по Фреше оператора K в пространстве X , K'_{2n} – производная по Фреше оператора K_{2n} в пространстве R_{2n} , x_0 и $\tilde{x}_0$ – начальные приближения.

Приведем итерационный процесс (13) к следующему виду

$$K'_n(\tilde{x}_0)\tilde{x}_{m+1} = K'_n(\tilde{x}_0)\tilde{x}_m - K_n\tilde{x}_m \quad (14)$$

Уравнение (14) на каждом шаге итерационного процесса определяет систему линейных алгебраических уравнений вида

$$Cx = g, \quad (15)$$

где $g = K'_n(\tilde{x}_0)\tilde{x}_m - K_n\tilde{x}_m$, $C = K'_n(\tilde{x}_0)$.

Всегда можно выбрать параметр h , удовлетворяющий неравенству

$$\left| a_j + \frac{b_{jj}}{\pi} \ln \frac{\frac{1}{n} - h}{h} \right| > E \ln n + D, \quad (16)$$

где E и D – вполне определенные константы, зависящие от функций $a(t)$ и $b'_3(t, \tau, \tilde{x}_0(\tau))$, тогда система (15) будет иметь единственное решение на каждой итерации $m = 0, 1, 2, \dots$

Теорема 2. Пусть уравнение (10) имеет единственное решение $x^*(t) \in H_\alpha$, и пусть функции $a(t)$, $f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Тогда при таких значениях h , что выполнены условия (16), система уравнений (15) на каждом шаге итерационного процесса имеет единственное решение, а итерационный процесс (14) сходится к точному решению уравнения (10) и справедлива оценка

$$\|x^* - \tilde{x}_m\| \leq \frac{B}{1-q} \frac{\ln n}{n^\alpha} + \frac{q^m}{1-q} \|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0\|.$$

Список литературы

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1963, 640 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967, 576 с.
3. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. : Янус, 1995. 520 с.
4. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 9. Р. 1230–1237.
5. Шалдаева А. А., Кудряшова Н. Ю. Численные методы решения нелинейных интегральных уравнений // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем. Пенза, 2018. С. 118–124.

Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений с комплексно-сопряженными неизвестными

**Наталья Юрьевна Кудряшова¹,
Наталья Валентиновна Мойко²,
Салих Рустямович Багдалов³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹math.kudryashova@yandex.ru, ²nataliyavalentinovna@yandex.ru,

³bagdalovsalikh@yandex.ru

Аннотация. Исследуются приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши на замкнутых контурах интегрирования, содержащих комплексно-сопряженные неизвестные. Получены достаточные условия однозначной разрешимости приближенного уравнения и оценена погрешность метода коллокации.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, интеграл типа Коши, ядро Гильберта, метод коллокации, квадратурная формула, теорема Адамара

Approximate methods of singular integral equations with complex conjugate unknowns

**Natalya Yu. Kudryashova¹, Natalya V. Moyko²,
Salikh R. Bagdalov³**

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹math.kudryashova@yandex.ru, ²nataliyavalentinovna@yandex.ru, ³bagdalovsalikh@yandex.ru

Abstract. Approximate solution methods of singular integral equations with Cauchy kernel on circulation integral, containing complex conjugate unknowns are examined. The necessary and sufficient conditions of unique solvability of approximate equation are obtained and error of method of collocation is estimated.

Keywords: singular integral equation, Cauchy kernel integral, Hilbert kernel, collocation method, quadrature, Hadamard theorem

При решении многих задач теории упругости, физики, аэродинамики, гравиметрии, теории оболочек, электродинамики и др. приходится сталкиваться с сингулярными интегральными уравнениями (СИУ). В связи с тем, что точные решения известны только для очень немногих классов СИУ, возникает необходимость в разработке

численных методов решения СИУ. Фундаментальный вклад в становление и развитие приближенных методов решения СИУ внесли такие ученые как Белоцерковский С. М., Бойков И. В., Гохберг И. Ц., Иванов В. В., Лаврентьев М. А., Лаврентьев М. М., Лифанов И. К. и многие другие.

Рассмотрим СИУ с ядром типа Коши

$$\begin{aligned} a_1(t)x(t) + a_2(t)\bar{x}(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{b_2(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{x}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ + \int_{\gamma} h_1(t, \tau)x(\tau) d\tau + \int_{\gamma} h_2(t, \tau)\bar{x}(\tau) d\tau = f(t), t \in \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат на комплексной плоскости, $x(t), \bar{x}(t)$ – комплексно-сопряженные неизвестные функции. Будем предполагать, что $a_1(t), a_2(t), b_1(t), b_2(t), x(t), \bar{x}(t) \in H_{\alpha}$.

Перейдем сначала с помощью преобразования Гильберта [4] от уравнения (1) к следующему уравнению с ядром Гильберта

$$\begin{aligned} a_1(e^{is})x(e^{is}) + a_2(e^{is})x(e^{-is}) - \frac{ib_1(e^{is})}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{i\sigma}) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma - \\ - \frac{ib_2(e^{is})}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{-i\sigma}) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + \frac{b_1(e^{is})}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{i\sigma}) d\sigma + \frac{b_2(e^{is})}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{-i\sigma}) d\sigma + \\ + i \int_0^{2\pi} h_1(e^{is}, e^{i\sigma}) x(e^{i\sigma}) d\sigma + i \int_0^{2\pi} h_2(e^{is}, e^{i\sigma}) x(e^{-i\sigma}) d\sigma = f(e^{is}), 0 \leq s < 2\pi. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем обозначения

$$a_p(e^{is}) = a_{p1}(s) + ia_{p2}(s), \quad b_p(e^{is}) = b_{p1}(s) + ib_{p2}(s),$$

$$h_p(e^{is}, e^{i\sigma}) = h_{p1}(s, \sigma) + ih_{p2}(s, \sigma), \quad p = 1, 2,$$

$$x(e^{is}) = x_1(s) + ix_2(s), \quad x(e^{-is}) = x_1(s) - ix_2(s).$$

Приравнявая отдельно действительные и мнимые части в уравнении (2) и вводя обозначения

$$A_{11}(s) = a_{11}(s) + a_{21}(s), \quad A_{12}(s) = a_{22}(s) - a_{12}(s), \quad A_{21}(s) = a_{12}(s) + a_{22}(s),$$

$$A_{22}(s) = a_{11}(s) - a_{21}(s), \quad B_{11}(s) = b_{12}(s) + b_{22}(s), \quad B_{12}(s) = b_{11}(s) - b_{21}(s),$$

$$B_{21}(s) = -b_{11}(s) - b_{21}(s), \quad B_{22}(s) = b_{12}(s) - b_{22}(s),$$

$$H_{11}(s, \sigma) = \frac{b_{11}(s)}{2\pi} + h_{11}(s, \sigma) + h_{21}(s, \sigma),$$

$$H_{12}(s, \sigma) = \frac{b_{21}(s)}{2\pi} + h_{22}(s, \sigma) - h_{12}(s, \sigma),$$

$$H_{21}(s, \sigma) = \frac{b_{12}(s)}{2\pi} + h_{12}(s, \sigma) + h_{22}(s, \sigma),$$

$$H_{22}(s, \sigma) = -\frac{b_{22}(s)}{2\pi} + h_{11}(s, \sigma) - h_{21}(s, \sigma),$$

получим систему уравнений следующего вида

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}(s)x_1(s) + A_{12}(s)x_2(s) + \frac{B_{11}(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_1(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \\ + \frac{B_{12}(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_2(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} H_{11}(s, \sigma) x_1(\sigma) d\sigma + \int_0^{2\pi} H_{12}(s, \sigma) x_2(\sigma) d\sigma = f_1(s) \\ \\ A_{21}(s)x_1(s) + A_{22}(s)x_2(s) + \frac{B_{21}(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_1(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \\ + \frac{B_{22}(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_2(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} H_{21}(s, \sigma) x_1(\sigma) d\sigma + \int_0^{2\pi} H_{22}(s, \sigma) x_2(\sigma) d\sigma = \\ = f_2(s), \quad 0 \leq s < 2\pi. \end{array} \right. \quad (3)$$

Построим вычислительную схему для приближенного решения системы (3).

Выберем две системы узлов

$$s_k = \frac{\pi k}{n}, \quad s_k^* = \frac{\pi k}{n} + h, \quad 0 < h < \frac{\pi}{2n}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Решение будем искать в виде полиномов

$$x_n^{(p)}(s) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k^{(p)} \psi_k(s), \quad p = 1, 2,$$

где

$$\psi_k(s) = \begin{cases} 0, & s = s_j^*, j \neq k, \\ 1, & s = s_k^*. \end{cases}$$

Для сингулярного интеграла $\int_0^{2\pi} x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma$ построим две квадратурных формулы

$$\int_0^{2\pi} x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j-1, j+1}}^{2n-1} x(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + R_n^{(1)}, \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma =$$

$$= \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j-1, j, j+1}}^{2n-1} x(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + x(s_j^*) \int_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + R_n^{(2)}. \quad (5)$$

Справедливы оценки погрешности квадратурных формул (4) и (5):

$$\left| R_n^{(1)} \right| \leq \frac{A}{n^\alpha} \ln n, \quad \left| R_n^{(2)} \right| \leq \frac{A}{n^\alpha} \ln n.$$

Заменим первый сингулярный интеграл в первом уравнении и второй сингулярный интеграл во втором уравнении системы (3) квадратурной формулой (4), а второй сингулярный интеграл в первом уравнении и первый сингулярный интеграл во втором уравнении той же системы по квадратурной формуле (5). Регулярные интегралы заменим квадратурной формулой прямоугольников. К системе (3) применим метод коллокации по узлам s_k^* , $k = 0, \dots, 2n-1$. Получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{p=1}^2 A_{1p}(s_j^*) x_p(s_j^*) + \frac{B_{11}(s_j^*)}{2\pi} \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j-1, j, j+1}}^{2n-1} x_1(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s_j^*}{2} d\sigma + \\ & + \frac{B_{12}(s_j^*)}{2\pi} \left(\sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j-1, j, j+1}}^{2n-1} x_2(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + x_2(s_j^*) \int_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma \right) + \\ & + \frac{\pi}{n} \sum_{p=1}^2 \sum_{k=0}^{2n-1} H_{1p}(s_j^*, s_k^*) x_p(s_k^*) = f_1(s_j^*), \\ & \sum_{p=1}^2 A_{2p}(s_j^*) x_p(s_j^*) + \frac{B_{21}(s_j^*)}{2\pi} \left(\sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j-1, j, j+1}}^{2n-1} x_1(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + x_1(s_j^*) \int_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma \right) + \\ & + \frac{B_{22}(s_j^*)}{2\pi} \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j-1, j+1}}^{2n-1} x_2(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s_j^*}{2} d\sigma + \\ & + \frac{\pi}{n} \sum_{p=1}^2 \sum_{k=0}^{2n-1} H_{2p}(s_j^*, s_k^*) x_p(s_k^*) = f_2(s_j^*), \quad j = 0, \dots, 2n-1. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Выбором параметра h можно всегда добиться того, чтобы при $j = 0, \dots, 2n-1$ выполнялись условия

$$\left| A_{pp}(s_j^*) + \frac{B_{pp}(s_j^*)}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2} \right)}{\sin \frac{h}{2}} \right| \right| > A + B \ln n,$$

где A, B – вполне определенные константы, зависящие от функций $A_{ij}(s), B_{ij}(s)$. Тогда, согласно теореме Адамара [5], система (6) будет однозначно разрешима.

Пусть уравнение (1) при правой части $f(t)$ имеет единственное решение $x^* = x_1 + ix_2 \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Обозначим единственное решение системы (6) $x_n^* = x_n^1 + ix_n^2$. Обозначим через K_n оператор, описываемый системой уравнений (6) в пространстве R_{2n} , а через K оператор, описываемый уравнением (1). Обозначим через P_n оператор, проектирующий пространство $X = H_\beta$ ($0 < \beta < \alpha$) на пространство интерполяционных многочленов по узлам s_k^* , $k = 0, \dots, 2n-1$. Тогда

$$\begin{aligned} x_n^* - P_n x^* &= K_n^{-1}(K_n(x_n^* - P_n x^*)) = K_n^{-1}(P_n f - K_n P_n x^*) = \\ &= K_n^{-1}(P_n K x^* - K_n P_n x^*) = K_n^{-1}(P_n K x^* - P_n K P_n x^*) + \\ &\quad + K_n^{-1}(P_n K P_n x^* - P_n K_n P_n x^*). \end{aligned}$$

Переходя к норме в пространстве R_{2n} имеем

$$\|x_n^* - P_n x^*\| \leq A_1 \|x^* - P_n x^*\| \cdot 2 \ln^2 n + 2A_2 \ln^2 n \|K P_n x^* - K_n P_n x^*\| \leq 2A \frac{\ln^3 n}{n^\alpha}.$$

Тогда справедлива оценка погрешности

$$\|x^* - x_n^*\| \leq \|x^* - P_n x^*\| + \|P_n x^* - x_n^*\| \leq 2A \frac{\ln^3 n}{n^\alpha}.$$

Теорема. Пусть уравнение (2) имеет единственное решение $x^*(s) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, и пусть функции $a_1(s), a_2(s), b_1(s), b_2(s), f_1(s), f_2(s) \in H_\alpha$. Тогда существуют такие значения h , что система уравнений (6) имеет единственное решение $x_n^*(s) = x_n^{(1)}(s) + ix_n^{(2)}(s)$ и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq 2A \frac{\ln^3 n}{n^\alpha}$.

Список литературы

1. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев : Наукова думка, 1968. 287 с.
2. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. : Янус, 1995. 520 с.
3. Бойков И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. 316 с.
4. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 512 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967. 576 с.
6. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 9. С. 1230–1237.

Сеточный метод решения задачи аналитического продолжения на плоскости

**Наталья Юрьевна Кудряшова¹,
Лилия Александровна Купряшина²**

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹math.kudryashova@yandex.ru, ²liliya_sl@mail.ru

Аннотация. Рассматривается решение задачи аналитического продолжения на плоскости сеточным методом.

Ключевые слова: численные методы, аналитическое продолжение функции, сеточные функции, сеточный метод

Sectional method for solving the problem of analytical continuation on the plane

Natalya Yu. Kudryashova¹, Lilia A. Kupriashina²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹math.kudryashova@yandex.ru, ²liliya_sl@mail.ru

Abstract. The article deals with the solution of the problem of analytic continuation on the plane by the grid method.

Keywords: numerical methods, analytic continuation of a function, grid functions, grid method

Задача аналитического продолжения является классической задачей теории функций комплексного переменного.

Исследованию различных плоских полей методами аналитического продолжения посвящены многочисленные публикации, из которых в первую очередь следует указать на работы [5–9]. Подробная библиография по методам аналитического продолжения в геофизике приведена в [1, 2].

Широкое применение при решении задачи аналитического продолжения получил аппарат интегралов типа Коши и сингулярных интегральных уравнений. Вопросы приближенного решения задач аналитического продолжения методами сингулярных интегральных уравнений были рассмотрены в статье [3].

Ранее были получены следующие результаты: построена вычислительная схема для решения задачи аналитического продолжения на плоскости методом сингулярных интегральных уравнений, основанная

на применении метода коллокации; установлены условия однозначной разрешимости приближенного уравнения; даны оценки погрешности используемых квадратурных формул [3].

При этом остались не исследованными вопросы приближенного решения указанной задачи сеточными методами. Представляется интересным построение численных методов приближенного решения задачи аналитического продолжения с помощью разностных методов, так как их численная реализация могла бы потребовать гораздо меньшего числа операций.

В данной работе будем рассматривать вопросы приближенного решения задачи аналитического продолжения на плоскости сеточными методами. Введем основные понятия.

Для того чтобы написать разностную схему, приближенно описывающее дифференциальное уравнение, нужно совершить следующие два шага [4].

1. Необходимо заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения.

2. Необходимо заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором, а также сформулировать разностный аналог для краевых условий и для начальных данных.

После осуществления такой процедуры мы приходим к алгебраической системе уравнений. Таким образом, задача о численном решении исходного (линейного) дифференциального уравнения сводится к вопросу о нахождении решения полученной алгебраической системы.

При численном решении той или иной математической задачи нельзя воспроизвести разностное решение для всех значений аргумента, изменяющегося внутри некоторой области евклидова пространства.

Естественно поэтому выбрать в этой области некоторое конечное множество точек и приближенное решение искать только в этих точках. Такое множество точек называется сеткой. Отдельные точки называют узлами сетки.

Функция, определенная в узлах сетки, называется сеточной функцией. Таким образом, заменили область непрерывного изменения аргумента сеткой, т.е. областью дискретного изменения аргумента; иными словами, мы осуществили аппроксимацию пространства решений дифференциального уравнения пространством сеточных функций.

Свойства разностного решения и, в частности, его близость к точному решению зависят от выбора сетки.

Рассмотрим некоторые примеры сеток.

Пример 1. Равномерная сетка на отрезке. Разобьем единичный отрезок $[0,1]$ на N равных частей. Расстояние между соседними узлами $x_i - x_{i-1} = h = 1/N$ назовем шагом сетки. Точки деления $x_i = ih$ – узлы сетки. Множество всех узлов $w_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1\}$ и составляет сетку (рис. 1), в данном случае введенном на отрезке.

В это множество можно включить граничные точки $x_0 = 0, x_N = 1$. Обозначим $\bar{w}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N-1, N\}$.

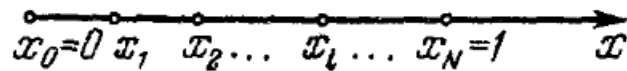


Рис. 1. Равномерная сетка на отрезке

На отрезке $[0,1]$ вместо функции непрерывного аргумента $y(x)$ будем рассматривать функцию дискретного аргумента $y_h(x_i)$. Значения этой функции вычисляются в узлах сетки x_i , а сама функция зависит от шага сетки h как от параметра.

Пример 2. Равномерная сетка на плоскости. Рассмотрим множество функций двух аргументов $u(x,t)$. В качестве области определения выберем прямоугольник

$$\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}.$$

Разобьем отрезки $[0,1]$ оси x и $[0,T]$ оси t соответственно на N_1 и N_2 частей; пусть $h = 1/N_1, \tau = T/N_2$. Через точки деления проведем прямые, параллельные соответствующим осям. В результате пересечения этих прямых получим узлы (x_i, t_j) , которые и образуют сетку (рис. 2).

$$\bar{w}_{h,\tau} = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}.$$

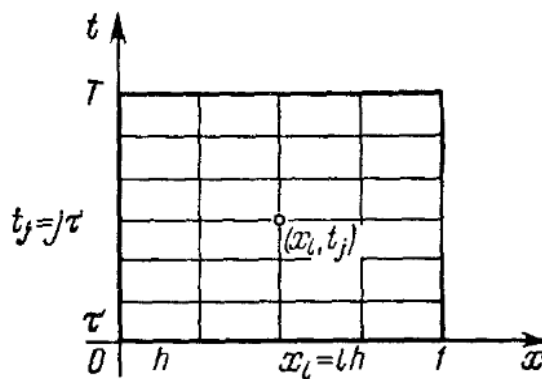


Рис. 2. Равномерная сетка на плоскости

Эта сетка имеет шаги h и τ соответственно по направлениям x и t . Соседними узлами сетки называются узлы, лежащие на одной и той же прямой (горизонтальной или вертикальной), расстояние между которыми равно шагу сетки (h или τ).

Пример 3. Неравномерная сетка на отрезке. Рассмотрим отрезок $0 \leq x \leq 1$. Вводя произвольные точки $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < 1$, разобьем

его на N частей. Множество узлов $\{x_i, i = 0, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ образует неравномерную сетку $\hat{w}_h[0,1]$. Расстояние между соседними узлами – шаг сетки, – равно $h_i = x_i - x_{i-1}$ и зависит уже от номера i узла, т.е. является сеточной функцией. Шаги сетки удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1.$$

Пример 4. Сетка в двумерной области. Пусть на плоскости $x = (x_1, x_2)$ дана область G сложной формы с границей Γ . Проведем прямые $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_1 > 0$; $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_2 > 0$. Тогда на плоскости (x_1, x_2) получим сетку (решетку) с узлами $(i_1 h_1, i_2 h_2), i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Эта решетка равномерна по каждому из направлений Ox_1 и Ox_2 . Нас интересуют только те узлы, которые принадлежат области $\bar{G} = G + \Gamma$, включая границу Γ . Те узлы $(i_1 h_1, i_2 h_2)$, которые попали внутрь G , назовем внутренними, а их совокупность обозначим w_h (рис.4). Рассмотрим точки пересечения прямых $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$ и $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ с границей Γ ; эти точки назовем граничными узлами, а множество всех граничных узлов обозначим γ_h . На рис. 3 знаком $\times$ обозначены граничные узлы, а знаком $\circ$ – внутренние узлы. Из рис.3 видно, что имеются граничные узлы, которые отстоят от ближайших к ним внутренних узлов на расстоянии, меньшем h_1 или h_2 . Таким образом, хотя сетка на плоскости и равномерна по x_1 и x_2 , но сетка $w = w_h + \gamma_h$ для области $\bar{G}$ неравномерна вблизи границы.

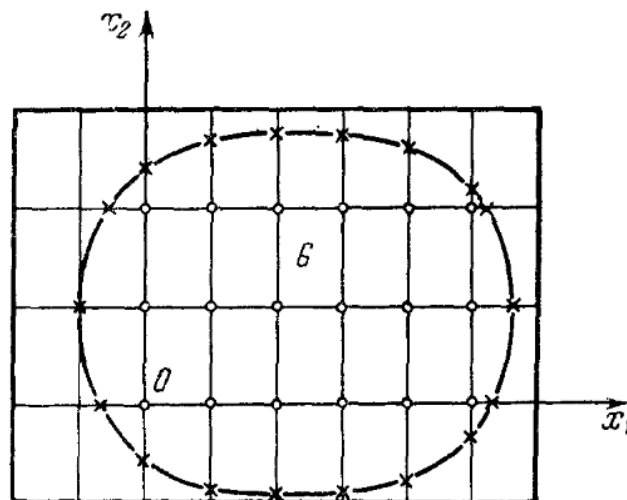


Рис. 3. Сетка в двумерной области

Итак, область $\bar{G}$ изменения аргумента x мы заменяем сеткой $\bar{w}_h$, т.е. конечным множеством точек x_i , принадлежащих $\bar{G}$. Вместо функций $u(x)$ непрерывного аргумента $x \in \bar{G}$ будем рассматривать сеточные функции $y(x_i)$, т.е. функции точки x_i , являющейся узлом сетки $\bar{w}_h = \{x_i\}$. Сеточную функцию $y(x_i)$ можно представить в виде вектора. Если перенумеровать все узлы в некотором порядке $x_1, x_2, \dots, x_N$, то значения сеточной функции в этих узлах можно рассматривать как компоненты вектора $Y = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_N)^T$. Если область G , в которой построена сетка, конечна, то размерность N вектора Y конечна. В случае неограниченной области G сетка состоит из бесконечного числа узлов и размерность вектора Y также бесконечна.

Обычно рассматриваются множества сеток $\{w_h\}$, зависящих от шага h как от параметра. Поэтому и сеточные функции $y_h(x)$ зависят от параметра h (или от числа узлов N в случае равномерной сетки). Если сетка w_h неравномерна, то под h следует понимать вектор $h = (h_1, h_2, \dots, h_N)$ с компонентами $h_1, \dots, h_N$. Это же замечание относится и к случаю, когда область G многомерна, $x = (x_1, \dots, x_p)$; тогда $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$, если сетка w_h равномерна по каждому из аргументов $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Функции $u(x)$ непрерывного аргумента $x \in G$ являются элементами некоторого функционального пространства H_0 . Множество сеточных функций $y_h(x)$ образует пространство H_h . Таким образом, используя метод конечных разностей, мы заменяем пространство H_0 пространством H_h сеточных функций $y_h(x)$.

Ниже предлагается вычислительная схема для приближенного решения задачи аналитического продолжения в плоском случае, основанная на применении сеточных методов.

Пусть на комплексной плоскости дана область $G \subset G^*$, ограниченная замкнутым контуром L , и пусть в области G^* задана аналитическая функция $x(z) = u(t, \tau) + iv(t, \tau)$, значения которой известны только внутри области G . Требуется найти приближенное значение функции $x(z)$ во всей области G^* .

Для простоты обозначений возьмем в качестве области G прямоугольник со сторонами параллельными осям координат (рис. 4).

Впишем область G_1 в другой прямоугольник, который покроем квадратной сеткой (t_k, τ_j) с шагом h , так чтобы узлы сетки попали на каждую сторону прямоугольника G . Рассмотрим узел (t_m, τ_n) , лежащий,

например, на верхней стороне прямоугольника G . Пусть $x(z) = u(t, \tau) + iv(t, \tau)$. Тогда с одной стороны, используя шаблон «крест» (рис. 5), получим

$$\frac{\partial^2 u(t_m, \tau_n)}{\partial t^2} = \frac{u_{m+1}^n - u_m^{n+1} - u_m^{n-1} + u_{m-1}^n}{h^2} + O(h^2). \quad (1)$$

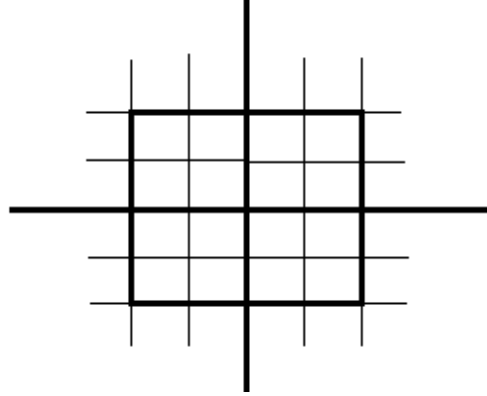


Рис. 4. Область G

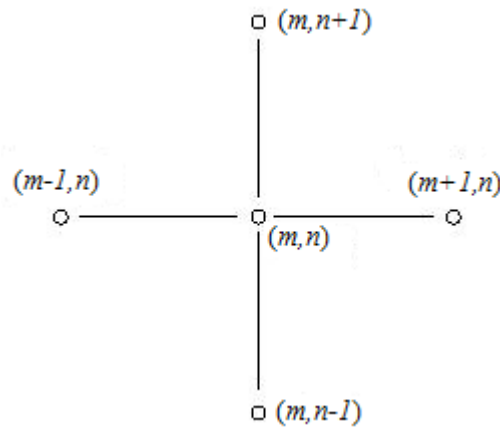


Рис. 5. Шаблон «крест»

С другой стороны,

$$\frac{\partial^2 u(t_m, \tau_n)}{\partial t^2} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + O(h^2), \quad (2)$$

где $u_k^j = u(t_k, \tau_j)$. Тогда

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n - u_m^{n-1} \quad (3)$$

и аналогично

$$v_m^{n+1} = 2v_m^n - v_m^{n-1}. \quad (4)$$

Таким образом, получим приближенное значение $x(z)$ в точке (t_m, τ_{n+1}) над областью G . Действуя подобным образом, можно найти приближенные значения $x(z)$ во всех узлах сетки $(n+1)$ -го слоя,

лежащих над G . Далее можно найти приближенные значения искомой функции во всех узлах $(n+2)$ -го слоя. Продолжая процесс, найдем приближенные значения функции $x(z)$ во всех узлах, лежащих над областью G . Аналогично можно найти значения $x(z)$ в узлах сетки, лежащих под прямоугольником G по формуле

$$u_m^{n-1} = 2u_m^n - u_m^{n+1}, v_m^{n+1} = 2v_m^n - v_m^{n-1}. \quad (5)$$

Применяя разностную аппроксимацию вторых частных производных по τ , найдем значения искомой функции в узлах сетки, лежащих левее и правее области G по следующим формулам

$$u_{m+1}^n = 2u_m^n - u_{m-1}^n, v_{m+1}^n = 2v_m^n - v_{m-1}^n. \quad (6)$$

$$u_{m-1}^n = 2u_m^n - u_{m+1}^n, v_{m-1}^n = 2v_m^n - v_{m+1}^n. \quad (7)$$

Таким образом, применяя формулы (3)-(7), можно найти значения функции $x(z)$ во всей области G_1 .

Список литературы

1. Бойков И. В., Бойкова И. А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравirazведки : монография. Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. 510 с.
2. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах аналитического продолжения // Геофизический журнал. 2000. № 1. С. 3.
3. Кудряшова Н. Ю., Купряшина Л. А. Об одном численном методе решения задачи аналитического продолжения на плоскости // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 140–144.
4. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М. : Наука, 1971. 553 с.
5. Страхов В. Н. К теории плоской обратной задачи магнитного потенциала при переменной намагниченности // Известия АН СССР. Физика Земли, 1970. № 3. С. 44–58.
6. Страхов В. Н. Некоторые вопросы плоской обратной задачи магнитного потенциала // Известия АН СССР. 1970. № 9. С. 31–41.
7. Страхов В. Н. Некоторые вопросы плоской задачи гравиметрии // Известия АН СССР. Физика Земли/ 1970. № 12. С. 32–44.
8. Хачай О. А. Об интерпретации повысотных аэромагнитных наблюдений // Известия АН СССР. Физика Земли. 1988. № 12. С. 47–56.
9. Цирульский А. В. О связи задачи аналитического продолжения логарифмического потенциала с проблемой определения границ возмущающей области // Известия АН СССР. Геофизика. 1964. № 11. С. 1646–1693.

Применение технологии OpenMP к численному решению интегральных уравнений

Вячеслав Владимирович Лапкин¹,
Герасим Алексеевич Коннов²,
Дмитрий Викторович Тарасов³

^{1,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²Научно-производственное предприятие «Рубин», Пенза, Россия

¹lapkin2001@inbox.ru, ²konnov1988_pnz@mail.ru, ³tarasovdv@mail.ru

Аннотация. Проанализирована возможность распараллеливания программного кода численного решения интегрального уравнения (на примере метода конечных элементов) при использовании технологии OpenMP. Представлены результаты замера времени при выполнении параллелизма как отдельных этапов решения (вычисление интегралов по кубатурным формулам, решения системы линейных алгебраических уравнений), так и для задачи в целом.

Ключевые слова: интегральные уравнения, OpenMP, параллельные вычисления

Application of OpenMP technology to numerical solution of integral equations

Vyacheslav V. Lapkin¹, Gerasim A. Konnov², Dmitriy V. Tarasov³

^{1,3}Penza State University, Penza, Russia

²Scientific-industrial Enterprise "Rubin", Penza, Russia

¹lapkin2001@inbox.ru, ²konnov1988_pnz@mail.ru, ³tarasovdv@mail.ru

Abstract. The possibility of parallelization of the program code for the numerical solution of an integral equation (using the finite element method as an example) using OpenMP technology is analyzed. The results of measuring the time when parallelism is performed both for individual stages of the solution (calculation of integrals by cubature formulas, solving a system of linear algebraic equations) and for the problem as a whole are presented.

Keywords: integral equations, OpenMP, parallel computing

Введение

Для решение интегральных уравнений зачастую требуется задействовать достаточно большое количество ресурсов ЭВМ, что отрицательно сказывается на времени выполнения программы. Изменить эту ситуацию позволяют многопроцессорные вычислительные системы с общей памятью. Как правило, предполагается, что процессоры в составе вычислительной системы удовлетворяют требованиям:

- обладают равной производительностью;
- являются равноправными при доступе к общей памяти,
- время доступа к памяти является одинаковым

Под данные параметры так же подходят домашние ПК, оснащённые многоядерными процессорами, в которых каждое из ядер представляет собой независимое функционирующее вычислительное устройство.

В настоящее время существует много технологий которые позволяют наиболее легко организовать параллельные вычисления, одна из самых популярных на текущий момент это OpenMP – открытый стандарт для распараллеливания программ на языках Си, Си++ и Фортран. Даёт описание совокупности директив компилятора, библиотечных процедур и переменных окружения, которые предназначены для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью [1].

Технология OpenMP позволяет распараллеливать программы, когда они уже написаны и отлажены для однопроцессорной вычислительной системы. Применение OpenMP на языках C/C++ и Фортран сводится к добавлению в уже написанную программу директив процессора, которые обрабатываются до начала компиляции программы.

Вычислительная схема решения интегрального уравнения методом конечных элементов

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-l}^l I(z')K(z-z')dz' = f(z), \quad -l \leq z \leq l, \quad (1)$$

где $I(z')$ – искомая функция, $K(z-z')$ – ядро интегрального уравнения, $f(z)$ – известная функция.

Разделим контур интегрирования длиной $2l$ на конечные элементы узлами $z_1, z_2, \dots, z_M$. Для простоты вычислений ограничимся линейным порядком полиномиальных функций и определим одномерные симплекс-элементы.

В каждом внутреннем узле z_s , $s = 2, 3, \dots, M-1$, данной сетки определим соответствующую функцию формы (базисную функцию):

$$N_s(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{s-1}}{z_s - z_{s-1}}, & z_{s-1} \leq z \leq z_s, \\ \frac{z_{s+1} - z}{z_{s+1} - z_s}, & z_s \leq z \leq z_{s+1}, \\ 0, & z \notin [z_{s-1}, z_s]. \end{cases}$$

Для узлов с номерами 1 и M функции формы определим следующим образом:

$$N_1(z) = \begin{cases} \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}, & z_1 \leq z \leq z_2, \\ 0, & z \notin [z_1, z_2], \end{cases} \quad N_M(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{M-1}}{z_M - z_{M-1}}, & z_{M-1} \leq z \leq z_M, \\ 0, & z \notin [z_{M-1}, z_M]. \end{cases}$$

Согласно методу конечных элементов [2] будем считать, что функция $I(z')$ в пределах каждого конечного элемента $\Delta_s = [z_s, z_{s+1}]$ $s = 1, 2, \dots, M - 1$ представлена некоторым значением $I_1(z'), \dots, I_{M-1}(z')$, а вне своей подобласти каждая такая функция $I_s(z')$ обращается в ноль. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_s} I_s(z') K(z - z') dz' = f(z), \quad (2)$$

Теперь, чтобы ошибка приближения равнялась нулю в, необходимо обеспечить равенство нулю интегралов, взятые от невязки с весовыми функциями N_β , где β принимает все возможные значения индексов для функций форм элементов Δ_s [3].

С учетом разбиения отрезка $[-l, l]$ на конечные элементы получим

$$\sum_{r=1}^{M-1} \sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \left(\int_{\Delta_s} I_s(z') K(z - z') dz' \right) N_\beta(z) dz = \sum_{r=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} f(z) N_\beta(z) dz. \quad (3)$$

Каждую функцию $I_s(z')$ внутри своей подобласти Δ_s представим в виде одномерного симплекс-элемента [3]:

$$I_s(z') = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j = [N] \{\Phi\}, \quad (4)$$

где $[N] = [N_i \ N_j]$ – матричная строка; $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$ – вектор-столбец.

Тогда соотношение (3) в матричном виде запишется следующий образом:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{M-1} \sum_{s=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \left(\int_{\Delta_s} \begin{Bmatrix} N_m(z) \\ N_p(z) \end{Bmatrix} \cdot [N_i(z') \ N_j(z')] \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix} K(z - z') dz' \right) dz = \\ = \sum_{r=1}^{M-1} \int_{\Delta_r} \begin{Bmatrix} N_m(z) \\ N_p(z) \end{Bmatrix} f(z) dz. \end{aligned} \quad (5)$$

Применимость технологии OpenMP для решения интегрального уравнения

К разработке параллельной программы реализующей решение интегральных уравнений, стоит приступать только после написания «обычной» программы для однопроцессорной вычислительной системы. И затем уже, в случае, когда время выполнения или другие вычислительные ресурсы оказываются приоритетными, следует переходить к параллельным вычислениям.

Распараллелить можно не все алгоритмы, а лишь те, которые содержат многопоточковые участки, например, циклы.

Кроме того, использование директив параллелизма технологии OpenMP также требует времени на построение соответствующих процедур. Следовательно, для цикла, тело которого не обладает достаточной вычислительной сложностью или же число повторений которого невелико, возможно и не следует применять директивы препроцессора для построения параллелизма.

Рассмотрим применение технологии OpenMP к методу конечных элементов. Одним из этапов решения интегральных уравнений методом конечных элементов является вычисление двойных интегралов, которые можно вычислить с помощью метода Симпсона. Для этого область интегрирования делится на прямоугольники, на каждом из которых работает формула:

$$\iint_{a c}^{b d} f(x, y) dx dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{9} \left\{ f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) + \right. \\ \left. + 4 f\left[a, \frac{c+d}{2}\right] + f\left[b, \frac{c+d}{2}\right] + \right. \\ \left. + f\left[\frac{a+b}{2}, c\right] + f\left[\frac{a+b}{2}, d\right] + 16 f\left[\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right] \right\}. \quad (6)$$

Параллелизм идет по циклу выполняющему суммирование всех значений (подсчитанных по формуле (6)) – в коде функция `Simpson2_base` по каждому элементарному прямоугольнику. На рис. 1 представлен параллельный метод Симпсона для вычисления двойных интегралов.

```
long double SimpsonKvadro(double a, double b, double c, double d, int l,
int m, long double (*f2) (double, double, int, int) )
{
    int N = 50; //число подобластей по каждой из осей, в которой используется локальная формула Симпсона
    double step_x = (b - a)/N, step_y = (d - c)/N;
    long double Integral2 = 0;
    int i, j;
    #pragma omp parallel shared(Integral2) private(i, j)
    {
        #pragma omp for schedule (guided)
```

```

        for (i=0;i<N;i++)
            for (j=0;j<N;j++)
                Integral2 += Simpson2_base(a + i*step_x, a + (i+1)*step_x,
c + j*step_y, c + (j+1)*step_y, l, m, f2);
    }
    return Integral2;
}

```

Рис. 1. Параллельная реализация с технологией OpenMP метода Симпсона для вычисления двойных интегралов

На рис. 1 видно, что для достижения параллелизма достаточно добавить лишь пару строк, содержащих директивы OpenMP.

Время выполнения данного программного кода в обычном режиме и при создании параллельных потоков с использованием директив OpenMP приведено в табл. 1. В качестве языка программирования был выбран язык C++, а программная разработка осуществлялась в среде Microsoft Visual Studio 2022 под Windows 10.

Таблица 1

Время расчета коэффициентов аппроксимирующей СЛАУ (5) в обычном режиме и при использовании технологии OpenMP при распараллеливании кубатурной формулы Симпсона для двойных интегралов

Размерность матрицы N	Время расчёта, с	
	на одном ядре	на двух ядрах
10	0,26	0,48
30	4,89	4,54
50	20,3	16,28
100	156,6	78,2
150	460,2	312,76

При таком построении метода Симпсона для вычисления двойных интегралов, точность и быстродействие (что собственно и добивались) действительно повышается с увеличением размерности.

Рассмотрим ещё один этап решения нашей задачи, а именно, решение системы линейных алгебраических уравнений большой размерности, которую так же возможно распараллелить, так как в данных алгоритмах присутствуют циклы.

В табл. 2 приведено время решения системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби в случае использования технологии OpenMP и без нее при различных значениях размерности системы. Число потоков было выбрано равным количеству ядер процессора, в нашем случае 2.

Время решения системы линейных алгебраических уравнений

Размерность СЛАУ	Время расчёта, с	
	выполнения «обычной» программы	выполнения параллельной программы на двух ядрах
100×100	0,000873	0,00121
500×500	0,0214	0,0242
1000×1000	0,0915	0,0853
5000×5000	2,173	1,228
10000×10000	9,254	4,420

Предпочтение методу Якоби отдано поскольку аппроксимирующая матрица A нашей СЛАУ, полученная после применения метода конечных элементов, зачастую будет иметь вид близкий к диагональному (с сильно разреженной матрицей). А для корректной работы метода Якоби как раз и необходимо, чтобы диагональные элементы матрицы A были ненулевыми [4].

Для сходимости метода достаточно, чтобы матрица A имела строго диагональное преобладание, хотя сходимость может быть очень медленно.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i=1, \dots, n \text{ или } |a_{ij}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|, j=1, \dots, n$$

Изменения листинга тела функции, решающей систему линейных алгебраических уравнений методом Якоби, продемонстрируем на примере только части кода – подведение СЛАУ $Ax = b$ к методу простой итерации (рис. 2).

```
#pragma omp parallel for
for (i = 0; i < n; i++) {
    #pragma omp parallel for
    for (j = 0; j < n; j++)
        if (i == j)
            Matr[i][j] = 0;
    else
        Matr[i][j] = -Matr[i][j] / Matr[i][i];
    Matr[i] = Matr[i] / Matr[i][i];
}
```

Рис. 2

В коде представленной на рис. 2, директива `#pragma omp parallel for` служит для выделения параллельных фрагментов (в конце блока директивы обеспечивается синхронизация потоков) и распределения итераций цикла между потоками.

Выводы

Так как скорость центральных процессоров более не увеличивается так же значительно, как и раньше, то параллелизм как небольших задач, так и задач, требующих существенных ресурсов ЭВМ, следует активно применять. Так даже на двухядерной машине время решения интегрального уравнения методом конечных элементов было заметно снижено уже при размерности аппроксимирующей СЛАУ равной 50. А вот параллелизм решения СЛАУ следует начинать делать для заметно больших размерностей матрицы.

Список литературы

1. URL: <https://www.openmp.org/wp-content/uploads/openmp-TR11.pdf>
2. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков : пер. с англ. М. : Мир, 1986. 229 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов : пер. с англ. М. : Мир, 1979. 392 с.
4. Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения : учеб. пособие для вузов. М. : Высш. шк., 2000, 266 с.

Численное решение обратной задачи для интегральной модели с двумя неизвестными линиями разрыва

Александр Николаевич Тында¹,
Георгий Денисович Танасов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹tyndaan@mail.ru, ²ruvosanat@yandex.ru

Аннотация. Приведено численное исследование динамических моделей, описываемых интегральными уравнениями с разрывными ядрами. Для случая двух неизвестных линий разрыва детально изложен прямой численный метод первого порядка точности.

Ключевые слова: динамические модели, численный метод первого порядка точности

Numerical solution of the inverse problem for an integral model with two unknown discontinuity curves

Aleksandr N. Tynda¹, George D. Tanasov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹tyndaan@mail.ru, ²ruvosanat@yandex.ru

Abstract. The paper is devoted to the numerical study of dynamic models described by integral equations with discontinuous kernels. For the case of two unknown discontinuity lines, a direct numerical method of the first order of accuracy is described in detail.

Keywords: dynamic models, direct numerical method of the first order of accuracy

Постановка задачи.

Рассмотрим, следуя [1,2], интегральную модель

$$\int_0^t K(t, s) x(s) ds = f(t), \quad (1)$$

где ядро $K(t, s)$ определено следующим образом

$$K(t, s) = \begin{cases} K_1(t, s), t, s \in m_1 \\ \dots\dots\dots \\ K_n(t, s), t, s \in m_n \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $m_i = \{t, s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}$, $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_n(t) = t$, $i \in \overline{1, n}$, $\alpha_i(t)$, $f(t) \in C_{[0, T]}^1$, функции $K_i(t, s)$ имеют непрерывные производные

относительно t при $(t, s) \in cl(m_i)$, $K_i(t, s) \neq 0$, $\alpha_i(0) = 0$, $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$, при $t \in (0, T]$, функции $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ возрастают в малой окрестности $0 \leq t \leq \tau$, $0 < \alpha_1(0) \leq \dots \leq \alpha_{n-1}(0) < 1$, а $cl(m_i)$ обозначает замыкание множества m_i .

Классическая постановка задачи для модели (1)–(2) состоит в определении функции $x(t)$ в предположении об известном ядре $K(t, s)$ и правой части $f(t)$. Однако ряд применений модели (1)–(2) на практике приводит к обратной задаче определения кривых $\alpha_i(t)$. При такой формулировке уравнение (1) интерпретируется как нелинейное интегральное уравнение с неизвестными пределами интегрирования. Общий случай задачи описан в статье [1]. В данной работе подробно изложен частный случай $n = 3$.

1. Численный метод

Рассмотрим систему уравнений, описанную в [1], для случая $n = 3$

$$K(t, s) = \begin{cases} \int_0^{a_1(t)} K_{11}(t, s, x_1(s)) ds + \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} K_{12}(t, s, x_2(s)) ds + \\ + \int_{a_2(t)}^t K_{11}(t, s, x_3(s)) ds = f_1(t) \\ \int_0^{a_1(t)} K_{21}(t, s, x_1(s)) ds + \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} K_{22}(t, s, x_2(s)) ds + \\ + \int_{a_2(t)}^t K_{23}(t, s, x_3(s)) ds = f_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

Задача заключается в определении неизвестных функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, $t \in [0, T]$. Для построения ее приближенного решения введем сетку узлов (не обязательно равномерную):

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T.$$

Пусть приближенное решение $\alpha_{i,N}(t)$ является кусочно-линейной функцией, построенной по точкам

$$(t_k, \alpha_{i,k}), \alpha_{i,k} = \alpha_i(t_k), \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Определим неизвестные значения α_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Чтобы выполнить дискретизацию системы (3) введем также вспомогательную целочисленную функцию

$$v_i(k) = v_{i,k} \text{ если } t_{v_{i,k}-1} < \alpha_{i,k} \leq t_{v_{i,k}}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Другими словами, $v_i(k)$ обозначает номер сегмента сетки, на который приходится неизвестное значение α_{ik} . Поскольку $\alpha_i(t)$ является монотонно возрастающей функцией и $\alpha_i(t) < t$, имеем

$$v_i(k) \leq k \text{ и } v_{i,p} \leq v_{i,m} \text{ для } p < m \quad i=1,2.$$

Потребуем чтобы в узлах сетки $t = t_k, k=1,2,\dots,N$, уравнения системы (3) обращались в равенства, а также, используя определение $v_{1,k}$ $v_{2,k}$ и обозначая $f_{1,k} = f_1(t_k)$ и $f_{2,k} = f_2(t_k)$, $k=1,2,\dots,N$, можно представить систему (3) в следующем виде

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{v_{1,k}-1} \int_{t_{m-1}}^{t_m} K_{11}(t_k, s, x_1(s)) ds + \int_{t_{v_{1,k}-1}}^{a_{1,k}} K_{11}(t_k, s, x_1(s)) ds + \\ & + \int_{a_{1,k}}^{t_{v_{1,k}}} K_{12}(t_k, s, x_2(s)) ds + \int_{t_{v_{2,k}-1}}^{a_{2,k}} K_{12}(t_k, s, x_2(s)) ds + \\ & + \int_{a_{2,k}}^{t_{v_{2,k}}} K_{13}(t_k, s, x_3(s)) ds + \sum_{p=v_{2,k}}^{k-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} K_{13}(t_k, s, x_3(s)) ds = f_{1,k}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{v_{1,k}-1} \int_{t_{m-1}}^{t_m} K_{21}(t_k, s, x_1(s)) ds + \int_{t_{v_{1,k}-1}}^{a_{1,k}} K_{21}(t_k, s, x_1(s)) ds + \\ & + \int_{a_{1,k}}^{t_{v_{1,k}}} K_{22}(t_k, s, x_2(s)) ds + \int_{t_{v_{2,k}-1}}^{a_{2,k}} K_{22}(t_k, s, x_2(s)) ds + \\ & + \int_{a_{2,k}}^{t_{v_{2,k}}} K_{23}(t_k, s, x_3(s)) ds + \sum_{p=v_{2,k}}^{k-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} K_{23}(t_k, s, x_3(s)) ds = f_{2,k}. \end{aligned}$$

Предполагая, что значения $v_{1,k}$ и $v_{2,k}$, $k=1,2,\dots,N$, каким-то образом получены, аппроксимируем интегралы в (4) следующим образом

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{v_{1,k}-1} K_{11}(t_k(t_{m-1} + t_m)/2, x_1(t_{m-1} + t_m/2))(t_m - t_{m-1}) + \\ & + (a_{1,k} - t_{v_{1,k}-1}) K_{11}(t_k, t_{v_{1,k}-1}, x_1(t_{v_{1,k}-1})) + \\ & + (t_{v_{1,k}} - a_{1,k}) K_{12}(t_k, t_{v_{1,k}-1}, x_2(t_{v_{1,k}})) + \\ & + (a_{2,k} - t_{v_{2,k}-1}) K_{12}(t_k, t_{v_{2,k}-1}, x_2(t_{v_{2,k}-1})) + \\ & + (t_{v_{2,k}} - a_{2,k}) K_{13}(t_k, t_{v_{2,k}}, x_3(t_{v_{2,k}})) + \\ & \sum_{p=v_{2,k}}^{k-1} K_{13}(t_k(t_p + t_{p+1})/2, x_3(t_p + t_{p+1}/2))(t_{p+1} - t_p) = f_{1,k}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{v_{1,k-1}} K_{11}(t_k(t_{m-1} + t_m)/2, x_1(t_{m-1} + t_m/2))(t_m - t_{m-1}) + \\
& + (a_{1,k} - t_{v_{1,k-1}})K_{21}(t_k, t_{v_{1,k-1}}, x_1(t_{v_{1,k-1}})) + \\
& + (t_{v_{1,k}} - a_{1,k})K_{22}(t_k, t_{v_{1,k-1}}, x_2(t_{v_{1,k}})) + \\
& + (a_{2,k} - t_{v_{2,k-1}})K_{22}(t_k, t_{v_{2,k-1}}, x_2(t_{v_{2,k-1}})) + \\
& + (t_{v_{2,k}} - a_{2,k})K_{23}(t_k, t_{v_{2,k}}, x_3(t_{v_{2,k}})) + \\
& \sum_{p=v_{2,k}}^{k-1} K_{23}(t_k(t_p + t_{p+1})/2, x_3(t_p + t_{p+1}/2))(t_{p+1} - t_p) = f_{2,k}
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь для аппроксимации интегралов в первом и шестом членах обоих уравнений (4) применяется квадратурная формула средних прямоугольников. Для второго, третьего, четвертого и пятого слагаемых, в обоих уравнениях, применяются формулы левых и правых прямоугольников. Из (5)–(6) имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_{2,k} = & A \left(\frac{f_{2,k} - S_3 - S_4 + t_{v_{1,k-1}} K_{21}(t_k, t_{v_{1,k-1}}, x_1(t_{v_{1,k-1}})) - t_{v_{1,k}} K_{22}(t_k, t_{v_{1,k}}, x_1(t_{v_{1,k}}))}{AC - D} \right) + \\
& + \frac{A(t_{v_{2,k-1}} K_{22}(t_k, t_{v_{2,k-1}}, x_2(t_{v_{2,k-1}})) - t_{v_{2,k}} K_{23}(t_k, t_{v_{2,k}}, x_3(t_{v_{2,k}})))}{AC - D} + \\
& + \frac{-t_{v_{2,k-1}} K_{12}(t_k, t_{v_{2,k-1}}, x_2(t_{v_{2,k-1}})) + t_{v_{2,k}} K_{12}(t_k, t_{v_{2,k}}, x_3(t_{v_{2,k}})) - f_{1,k} + S_1 + S_2}{AC - D} + \\
& + \frac{-t_{v_{1,k-1}} K_{11}(t_k, t_{v_{1,k-1}}, x_1(t_{v_{1,k-1}})) + t_{v_{1,k}} K_{12}(t_k, t_{v_{1,k}}, x_2(t_{v_{1,k}}))}{AC - D} \\
\alpha_{1,k} = & \frac{f_{1,k} - S_1 - S_2 + t_{v_{1,k-1}} - (\alpha_{2,k} - t_{v_{2,k-1}}) K_{12}(t_k, t_{v_{2,k-1}}, x_2(t_{v_{2,k-1}}))}{K_{11}(t_k, t_{v_{1,k-1}}, x_1(t_{v_{1,k-1}})) - t_{v_{1,k}} K_{12}(t_k, t_{v_{1,k}}, x_2(t_{v_{1,k}}))} \\
& + \frac{-(t_{v_{2,k}} - \alpha_{2,k}) K_{13}(t_k, t_{v_{2,k}}, x_3(t_{v_{2,k}})) + t_{v_{1,k-1}} K_{11}(t_k, t_{v_{1,k-1}}, x_1(t_{v_{1,k-1}}))}{K_{11}(t_k, t_{v_{1,k-1}}, x_1(t_{v_{1,k-1}})) - t_{v_{1,k}} K_{12}(t_k, t_{v_{1,k}}, x_2(t_{v_{1,k}}))} \\
& + \frac{-t_{v_{1,k}} K_{12}(t_k, t_{v_{1,k}}, x_2(t_{v_{1,k}}))}{K_{11}(t_k, t_{v_{1,k-1}}, x_1(t_{v_{1,k-1}})) - t_{v_{1,k}} K_{12}(t_k, t_{v_{1,k}}, x_2(t_{v_{1,k}}))},
\end{aligned}$$

где

$$S_1 = \sum_{m=1}^{v_{1,k}-1} K_{11} \left(t_k, \frac{t_{m-1} + t_m}{2}, x_1 \left(\frac{t_{m-1} + t_m}{2} \right) \right) (t_m - t_{m-1}), \quad (7)$$

$$S_2 = \sum_{p=v_{2,k}}^{k-1} K_{13} \left(t_k, \frac{t_p + t_{p+1}}{2}, x_3 \left(\frac{t_p + t_{p+1}}{2} \right) \right) (t_{p+1} - t_p),$$

$$S_3 = \sum_{m=1}^{v_{1,k}-1} K_{21} \left(t_k, \frac{t_{m-1} + t_m}{2}, x_1 \left(\frac{t_{m-1} + t_m}{2} \right) \right) (t_m - t_{m-1}), \quad (8)$$

$$S_4 = \sum_{p=v_{2,k}}^{k-1} K_{23} \left(t_k, \frac{t_p + t_{p+1}}{2}, x_3 \left(\frac{t_p + t_{p+1}}{2} \right) \right) (t_{p+1} - t_p), \quad (9)$$

$$A = K_{11} \left(t_k, t_{v_{1,k}-1}, x_1(t_{v_{1,k}-1}) \right) - K_{12} \left(t_k, t_{v_{1,k}}, x_2(t_{v_{1,k}}) \right), \quad (10)$$

$$B = K_{21} \left(t_k, t_{v_{1,k}-1}, x_1(t_{v_{1,k}-1}) \right) - K_{22} \left(t_k, t_{v_{1,k}}, x_2(t_{v_{1,k}}) \right), \quad (11)$$

$$C = K_{22} \left(t_k, t_{v_{2,k}-1}, x_2(t_{v_{2,k}-1}) \right) - K_{23} \left(t_k, t_{v_{2,k}}, x_3(t_{v_{2,k}}) \right), \quad (12)$$

$$D = K_{12} \left(t_k, t_{v_{2,k}-1}, x_2(t_{v_{2,k}-1}) \right) - K_{13} \left(t_k, t_{v_{2,k}}, x_3(t_{v_{2,k}}) \right). \quad (13)$$

Таким образом, при знании чисел $v_{1,k}$ и $v_{2,k}$, $k = 1, 2, \dots, N$, приближенные значения $\alpha_{2,k}$ и $\alpha_{1,k}$ неизвестных функций в точках сетки могут быть найдены по представленным выше явным формулам. Идея определения чисел $v_{1,k}$, $v_{2,k}$ состоит в последовательном переборе их возможных значений для каждого номера узла $k = 1, 2, \dots, N$. Перебор прекращается при выполнении условий $\alpha_{1,k} \in (t_{v_{1,k}-1}, t_{v_{1,k}}]$, $\alpha_{2,k} \in (t_{v_{2,k}-1}, t_{v_{2,k}}]$, подтверждающих предположение о принадлежности искомым значений соответствующим сегментам сетки.

Список литературы

1. Tynda A. N., Sidorov D. N. Inverse Problem for the Integral Dynamic Models with Discontinuous Kernels // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 3945.
2. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In: L. O. CHUA, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Singapore : World Scientific Press, 2015. Vol. 87.

Исследование однородных разностных схем решения уравнений математической физики

Вадим Олегович Устимов¹,
Наталья Юрьевна Кудряшова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ustimovvadim@mail.ru, ²math.kudryashova@yandex.ru

Аннотация. Проводится исследование однородных разностных схем для одномерных и многомерных уравнений математической физики.

Ключевые слова: разностные схемы, сходимость, устойчивость, уравнение математической физики, уравнение Пуассона, уравнение теплопроводности, уравнение гиперболического типа

Investigation of homogeneous difference schemes equations of mathematical physics

Vadim O. Ustimov¹, Natalya Yu. Kudryashova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹ustimovvadim@mail.ru, ²math.kudryashova@yandex.ru

Abstract. The paper investigates homogeneous difference schemes for one-dimensional and multidimensional equations of mathematical physics.

Keywords: difference schemes, convergence, stability, mathematical physics equation, Poisson equation, thermal conductivity equation, hyperbolic type equation

В данной работе исследуются однородные разностные схемы для основных видов уравнений математической физики.

Рассмотрим уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами – волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (1)$$

заданное на $D_T = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$. В данном уравнении $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$. Функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \bar{u}_0(x), \quad (2)$$

и граничным условиям первого рода

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(l, t) = u_2(t). \quad (3)$$

Будем предполагать, что решение этой задачи единственно и непрерывно на области вместе с производными до второго порядка включительно.

Выберем сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \hat{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ на области D_T , которая состоит из равномерных сеток:

$$\hat{\omega}_h = \left\{ x_m = mh, \quad m = \overline{0, M}, \quad h = \frac{l}{M} \right\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \left\{ t_n = n\tau, \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad n = \overline{0, N} \right\}.$$

Построим на ней однородную трехслойную схему с весами

$$u_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda(t) u^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \varphi.$$

где

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_t \approx u_{\bar{t}\bar{t}}, \quad Lu + f(x, t) \approx \Lambda(t) u^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \varphi(x, t).$$

Аппроксимируем частные производные в исходном уравнении разностными отношениями и схема (1) примет вид

$$\left(E - \frac{\tau^2(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \Lambda \right) u_{\bar{t}\bar{t}} - (\sigma_1 - \sigma_2) \tau \Lambda u_t = \Lambda u + \varphi, \quad (4)$$

здесь E – единичный оператор.

Будем рассматривать симметричный случай, т.е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$,

$$\left(E - \tau^2 \sigma \Lambda \right) u_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda u + \varphi(x, t), \quad 0 < t = j\tau. \quad (5)$$

Начальное условие второго рода можно аппроксимировать следующим способом:

$$u_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad \text{где } \tilde{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(Lu_0 + f)_{t=0}. \quad (6)$$

Порядок аппроксимации равен $O(\tau^2)$

Получим трехслойную задачу, которую будем решать на каждом временном слое методом разностной прогонки:

$$\begin{cases} \left(E - \tau^2 \sigma \Lambda \right) \hat{u} = F, \quad 0 < x = ih < l, \quad \hat{u}_0 = \hat{u}_1, \quad \hat{u}_N = \hat{u}_2, \\ F(t) = 2u - \tilde{u} - \tau^2 \Lambda \left((2\sigma - 1)u - \overset{\sim}{\sigma u} \right) + \tau^2 \varphi, \quad t \geq \tau, \\ F(0) = u_0 + \tau^2(0,5 - \sigma) \Lambda(0)u_0 + \tau \bar{u}_0(x) + 0,5\tau^2 f(x, 0), \end{cases} \quad (7)$$

где $\hat{u} = u^{i+1}, \tilde{u} = u^{i-1}$.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности: ищется непрерывное в прямоугольнике $D_T = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (8)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (9)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = u_1(t), u(1, t) = u_2(t), 0 \leq t \leq T. \quad (10)$$

Коэффициент $k(x, t)$ ограничен снизу и сверху

$$0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, (x, t) \in \bar{D}_T, \quad (11)$$

где c_1, c_2 - постоянные, и удовлетворяет условию Липшица по t .

Предполагается, что задача (8)–(10) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными.

Построим в $\bar{D}_T$ сетку. Пусть

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}$$

равномерная сетка с шагом h на отрезке $0 \leq x \leq 1$,

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N_0, \tau = T/N_0\} -$$

сетка с шагом τ на отрезке $0 \leq t \leq T$,

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), x_i \in \bar{\omega}_h, t_j \in \bar{\omega}_\tau\}$$

сетка в $\bar{D}_T$,

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), x_i = ih, 0 < i < N, t_j = j\tau, 0 < j \leq N_0\}.$$

Заменим u на y и в результате аппроксимации получим следующую однородную консервативную разностную схему (обозначим $y = y^j, \hat{y} = y^{j+1}, y_t = (\hat{y} - y) / \tau$):

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} y_t = \Lambda(\bar{t})(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, & 0 < x = ih < 1, 0 \leq t_j = j\tau < T, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) = u_1(t), y(1, t) = u_2(t), & x \in \bar{\omega}_\tau, \\ \Lambda(\bar{t})y = (a(x, \bar{t})y_{\bar{x}})_x, \end{cases} \quad (12)$$

где $t = \bar{t} = t_{j+1/2}$.

При $\sigma = 0$ получаем явную схему

$$y_t = \Lambda(\bar{t})y + \varphi,$$

при $\sigma = 1$ получаем схему с опережением или чисто неявную схему

$$y_t = \Lambda(\bar{t})\hat{y} + \varphi,$$

при $\sigma = 0,5$ получаем симметричную схему

$$y_t = 0,5\Lambda(\bar{t})(\hat{y} + y) + \varphi.$$

При $\sigma \geq 0,5$ разностная схема (12) абсолютно устойчива.

Рассмотрим экономичную разностную схему на примере граничной задачи для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, 0 \leq x, y \leq 1, 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= \Psi(x, y), \\ u(x, y, t)|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где Γ – боковые грани прямоугольного параллелепипеда $D = \{0 \leq x, y \leq 1, 0 < t \leq T\}$.

Будем предполагать, что задача (13) имеет единственное решение $u(x, y, t)$ и это решение непрерывно в $\bar{D} = D + \Gamma$ вместе со своими про-

изводными $\frac{\partial^i u}{\partial t^i} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k} + \frac{\partial^k u}{\partial y^k}, k = 3, 4$.

Выберем квадратную сетку по пространству, и координаты узлов (x_m, y_n, t_p) определим по правилу

$$x_m, y_n, t_p = (mh, nh, p\tau), m, n = 0, 1, \dots, M, h = \frac{1}{M},$$

$\tau > 0, p = 0, 1, \dots, N, N\tau \leq T < (N+1)\tau$.

Разностная схема для задачи (13) имеет вид:

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (14)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{mn}^{p+1} - u_{mn}^p}{\tau} - \Lambda_{yy}(u_{mn}^{p+1}), \\ m, n = 1, 2, \dots, M-1, p = 0, 1, \dots, N-1, \\ u_{mn}^p, m, n = 0, 1, \dots, M, p = 0, 1, \dots, N-1, \\ u_{mn}^{p+1}, (mh, nh, (p+1)\tau) \in \Gamma_h; \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} 0, m, n=1, \dots, M-1, p=0, 1, \dots, N-1, \\ 0, (mh, nh, (p+1)\tau) \in \Gamma_h, \\ \tilde{u}_{mn}^{p+1}, m, n=0, 1, \dots, M, p=0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Сеточная функция $\tilde{u}_{mn}^{p+1}$ фигурирующая в определении $f^{(h)}$, вычисляется как решение вспомогательной разностной схемы

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{mn}^{p+1} - u_{mn}^p}{\tau} &= \Lambda_{xx}(\tilde{u}_{mn}^{p+1}), \\ m, n &= 1, 2, \dots, M-1, p=0, 1, \dots, N-1, \\ u_{mn}^0 &= \psi_{mn}, m, n=0, 1, \dots, M, \\ \tilde{u}_{mn}^{p+1} &= 0, (mh, nh, (p+1)\tau) \in \Gamma_h. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda_{xx}(\tilde{u}_{mn}^{p+1}) &= \frac{\tilde{u}_{m+1,n}^{p+1} - 2\tilde{u}_{mn}^{p+1} + \tilde{u}_{m-1,n}^{p+1}}{h^2}, \\ \Lambda_{yy}(u_{mn}^{p+1}) &= \frac{u_{m,n+1}^{p+1} - 2u_{mn}^{p+1} + u_{m,n-1}^{p+1}}{h^2}. \end{aligned}$$

Доказано, что разностная схема (14) аппроксимирует задачу (13) с погрешностью порядка $O(\tau + h^2)$, абсолютно устойчива и экономична.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка – уравнение Пуассона в области $D = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$, которое имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (15)$$

и условие Дирихле на границе Γ области D

$$u|_{\Gamma} = \varphi(M), \quad (16)$$

где φ – известная функция, а M – точка контура Γ . Предположим, что задача (15), (16) имеет только одно решение $u(x, y)$, лежащее в области

$$\bar{D} = D + \Gamma, \text{ и это решение имеет непрерывные производные } \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \text{ и } \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

.

Выберем прямоугольную сетку, определив положение узлов (x_m, y_n) по правилу:

$$x_m = mh, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$y_n = nl, n = 0, 1, 2, \dots, h > 0, l > 0.$$

Построим разностную схему

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (17)$$

где

$$L_h u^{(h)} = \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2},$$

$$f^{(h)} \equiv f(x_m, y_n).$$

В нашем случае u_{mn} это приближенное сеточное значение решения, представленное в уравнении (15), так что $u_{m,n} \approx u(x_m, y_n)$ и $u(x, y)$ – решение уравнения (15).

Разностная схема (17) аппроксимирует задачу (15) – (16) с погрешностью порядка $O(h^2 + l^2)$.

Реализация разностной схемы (17) может быть произведена методом матричной прогонки или с помощью итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Список литературы

1. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971. 552 с.
2. Кудряшова Н. Ю., Алексеев И. Ю. Разностные схемы для двумерных линейных уравнений математической физики // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XIV Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов / под ред. И. В. Бойкова. Пенза, 2020. С. 49–55.
3. Егорова А. А., Кудряшова Н. Ю. Экономичные разностные схемы для решения многомерных задач математической физики // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XIII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов / под ред. И. В. Бойкова. Пенза, 2019. С. 96–100.

Численные методы решения уравнений математической физики на нейронных сетях

Евгений Сергеевич Фролов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
fr0love@yandex.ru

Аннотация. Исследуется динамика тонких пластин на нейронных сетях.

Ключевые слова: тонкие пластины, основное дифференциальное уравнение прогиба тонких пластин, нейронные сети

Numerical methods for solving equations mathematical physics on neural networks

Evgeny S. Frolov

Penza State University, Penza, Russia
fr0love@yandex.ru

Abstract. The dynamics of thin plates on neural networks is investigated.

Keywords: thin plates, governing differential equation of deflection of thin plates, neural networks

Тонкие пластины [1] изначально представляют собой плоские конструктивные элементы, ограниченные двумя параллельными плоскостями, называемыми *гранями*, и цилиндрической поверхностью, называемой *ребром* или *границей*. Образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны плоским граням. Расстояние между плоскими гранями называется толщиной (h) пластины. Предполагается, что толщина пластины мала по сравнению с другими характерными размерами граней (длина, ширина, диаметр и т.д.). Геометрически пластины ограничены либо прямыми, либо изогнутыми границами (рис. 1). Статические или динамические нагрузки, переносимые пластинами, преимущественно перпендикулярны их торцам.

Несущее действие пластины в определенной степени аналогично действию балок или тросов; таким образом, пластины могут быть аппроксимированы решеткой из бесконечного числа балок или сетью из бесконечного числа тросов, в зависимости от жесткости конструкций при изгибе. Такое двумерное структурное взаимодействие пластин приводит к получению более легких конструкций и, следовательно, дает многочисленные экономические преимущества. Пластина, изначально плоская,

развивает сдвигающие усилия, изгибающие и скручивающие моменты, чтобы противостоять поперечным нагрузкам. Поскольку грузы обычно перевозятся в обоих направлениях и поскольку жесткость при скручивании в изотропных пластинах весьма значительна, пластина значительно жестче балки сопоставимого пролета и толщины. Таким образом, тонкие пластины сочетают в себе малый вес и эффективность формы с высокой несущей способностью, экономичностью и технологичностью.

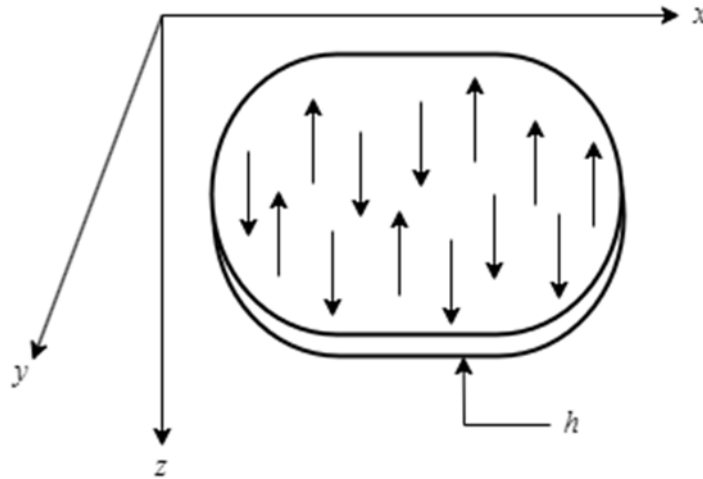


Рис. 1. Тонкая пластина

Благодаря неоспоримым преимуществам, рассмотренным выше, тонкие пластины широко используются во всех областях машиностроения. Пластины используются в архитектурных сооружениях, мостах, гидротехнических сооружениях, тротуарах, контейнерах, самолетах, ракетах, кораблях, приборах, деталях машин и т.д.

Мы рассмотрим пластину, для которой принято делить толщину h на равные половины плоскостью, параллельной ее граням. Эта плоскость называется *средней плоскостью* пластины (рис. 2). Подвергаясь поперечным нагрузкам, изначально плоская пластина деформируется, и средняя плоскость переходит в некоторую криволинейную поверхность, которая называется *средней поверхностью*.

Мы будем рассматривать только пластины постоянной толщины. Для таких пластин форма определяется путем описания геометрии ее средней плоскости. В зависимости от формы этой средней плоскости пластины бывают прямоугольные, круглые, эллиптические и т.д.

Указанные выше пластины могут быть описаны *основным дифференциальным уравнением* тонких пластин, которое определяется следующим образом:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}, \quad (1)$$

где w – отклонение от первоначального горизонтального состояния пластины, p – нагрузка, D – жесткость пластины при изгибе. Это уравнение было получено Лагранжем в 1811 году.

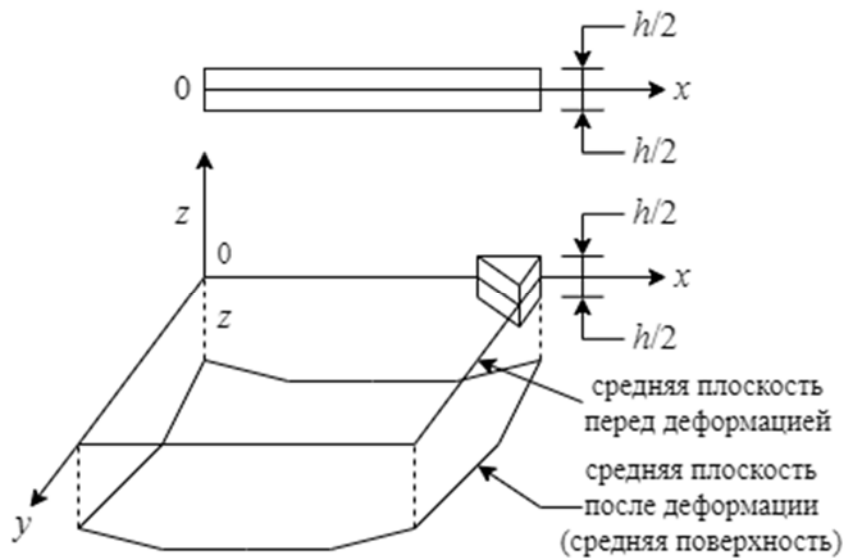


Рис. 2. Средняя плоскость и средняя поверхность

Уравнение (1) может быть переписано следующим образом:

$$\nabla^2 (\nabla^2 w) = \nabla^4 w = \frac{p}{D},$$

где

$$\nabla^4 () \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

обычно называется *бигармоническим оператором*.

Рассмотрим задачу решения основного дифференциального уравнения прогиба тонких пластин (1), дополненного следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} w(0, y) &= f_1(y), \quad w(a, y) = f_2(y), \\ w(x, 0) &= g_1(x), \quad w(x, b) = g_2(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где a – длина пластины, b – ширина пластины.

Для решения задачи (1), (2) воспользуемся нейронными сетями четырех видов:

- 1) полносвязная нейронная сеть [2];
- 2) рекуррентная нейронная сеть [3-5];
- 3) сеть *LSTM* [6];
- 4) сеть *GRU* [7].

Архитектура каждой сети определяется эмпирически на основе наблюдений и большого числа попыток решения задачи на обучающих данных, с целью нахождения наилучшего результата, как и практически во всех случаях, связанных с нейронными сетями.

Прежде чем переходить к обучению сетей необходимо подготовить обучающий набор данных. Зададим сетку равноотстоящих узлов x_m и y_n

$$x_m = \frac{a}{M} \cdot m, \quad m = 0, \dots, M,$$

$$y_n = \frac{b}{N} \cdot n, \quad n = 0, \dots, N,$$

где M и N – количество узлов по x и y соответственно.

Для каждой пары узлов (x_m, y_n) , $m = 0, \dots, M$, $n = 0, \dots, N$, рассчитаем значения функций $p(x, y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, которые вместе с узлами и жесткостью пластины D собираются в таблицу, вид которой представлен табл. 1.

Таблица 1

Обучающие данные для решения задачи (1), (2)

x_m	y_n	$p(x_m, y_n)$	$f_1(y_n)$	$f_2(y_n)$	$g_1(x_m)$	$g_2(x_m)$	D
...	...	...	...	...	...	...	...

Таким образом, мы получаем набор данных, который затем случайным образом разбивается на две части в соотношении 90 на 10 %, где 90 % используется для непосредственно как обучающие данные, а оставшееся 10 % как валидационные данные. Каждая строчка табл. 1 соответствует значению функции $w(x, y)$ в узле (x_m, y_n) .

В качестве обучающих функций, для которых и будет строиться табл. 1, выступают

$$w_{mn}^{(1)}(x, y) = \begin{cases} \cos(nx)\sin(my), & n + m = 3, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0, \\ \cos(3x), & m = 0, \end{cases} \quad (3)$$

и

$$w_{mn}^{(2)}(x, y) = \begin{cases} \sin(nx)\cos(my), & n + m = 3, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0, \\ \cos(3y), & n = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Необходимо отметить, что в качестве обучающих функций могут выступать любые непрерывные функции. Главным моментом тут является сама задача, для которой затем будет применяться обученная нейронная сеть. Вполне очевидно, что, используя для обучения сети тригонометрические функции на определенном промежутке, мы научим ее

решать подобную задачу только для тригонометрических функций и только для определенного промежутка. Поэтому для более широкого применения данного метода имеет смысл расширять набор обучающих данных. Однако такой подход ведет к: увеличению ошибки сети, так как одинаковые выходы сети могут соответствовать разным наборам признаков, в данном случае значениям функций $p(x, y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$; увеличению общей сложности вычислений. Оба фактора влияют на точность и заставляют использовать более громоздкие архитектуры, требующие больших вычислительных мощностей и времени расчета. Поэтому обобщение сети на более широкий класс функций в целом является гораздо более трудоемкой и сложной задачей, чем может показаться на первый взгляд.

Рассмотрим решение следующей задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= 4 \cos x \sin y, \quad x \in [0, 2\pi], \quad y \in [0, 2\pi], \\ w(0, y) &= \sin y, \quad w(2\pi, y) = \sin y, \\ w(x, 0) &= 0, \quad w(x, 2\pi) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Точное решение которой определяется как

$$w(x, y) = \cos x \sin y.$$

Результаты решения представлены в таблице 2, в которой архитектура сети указана без упоминания: первого или, как еще говорят, нулевого слоя, который ничего не делает, кроме проверки соответствия данных размерностям; и последнего слоя, представляющего собой один нейрон с линейной функцией активации, делающий окончательный вывод. В качестве функции потерь использовалась *среднеквадратическая ошибка* (*mean squared error, MSE*), которая вычисляется как

$$MSE = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (w(x_m, y_n) - \bar{w}(x_m, y_n))^2,$$

где $w(x_m, y_n)$ – точные значения, $\bar{w}(x_m, y_n)$ – приближенные значения, предсказанные сетью.

Также в качестве дополнительной метрики отслеживания процесса обучения и точности сети выступает *средняя абсолютная ошибка* (*mean absolute error, MAE*):

$$MAE = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |w(x_m, y_n) - \bar{w}(x_m, y_n)|.$$

Построение нейронных сетей осуществлялось на языке программирования Python с использованием TensorFlow [8–10] и Keras [11, 12].

Таблица 2

Результаты решения задачи (5), $M = 50$, $N = 50$

Архитектура сети			Решающий алгоритм	MAE	MSE
Тип слоя	Количество нейронов	Функция активации			
Полносвязная нейронная сеть					
Dense	552	ReLU	Adamax	0.0085288892	0.0001257824
Dense	384	SELU			
Dense	328	ReLU			
Dense	728	SELU			
Dense	56	sigmoid			
Dense	200	tanh			
Dense	888	SELU			
Dense	128	tanh			
Рекуррентная нейронная сеть					
SimpleRNN	472	tanh	Adam	0.0054408824	0.0000455976
SimpleRNN	824	GELU			
SimpleRNN	528	GELU			
Сеть LSTM					
LSTM	896	SELU	Nadam	0.0073529607	0.0000980213
LSTM	480	sigmoid			
LSTM	880	tanh			
Сеть GRU					
GRU	376	ReLU	Nadam	0.0023594755	0.0000096013
GRU	504	tanh			
GRU	624	Swish			

Найдем решение еще одной задачи, постановка которой выглядит следующим образом

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 4 \sin x \sin y, \quad x \in [0, 2\pi], \quad y \in [0, 2\pi],$$

$$w(0, y) = 0, \quad w(2\pi, y) = 0,$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w(x, 2\pi) = 0,$$
(6)

Точное решение задачи (6)

$$w(x, y) = \sin x \sin y.$$

Для решения задачи (6) использовались те же архитектуры нейронных сетей, а также базисные функции (3) и (4). Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты решения задачи (5), $M = 50$, $N = 50$

Архитектура сети			Решающий алгоритм	MAE	MSE
Тип слоя	Количество нейронов	Функция активации			
Полносвязная нейронная сеть					
Dense	552	ReLU	Adamax	0.0099999876	0.0001474778
Dense	384	SELU			
Dense	328	ReLU			
Dense	728	SELU			
Dense	56	sigmoid			
Dense	200	tanh			
Dense	888	SELU			
Dense	128	tanh			
Рекуррентная нейронная сеть					
SimpleRNN	472	tanh	Adam	0.0194663554	0.0005570196
SimpleRNN	824	GELU			
SimpleRNN	528	GELU			
Сеть LSTM					
LSTM	896	SELU	Nadam	0.0041743684	0.0000326817
LSTM	480	sigmoid			
LSTM	880	tanh			
Сеть GRU					
GRU	376	ReLU	Nadam	0.0113550489	0.0001667707
GRU	504	tanh			
GRU	624	Swish			

Таким образом, мы получаем достаточно точное предсказание значения функции $w(x, y)$ в точке (x_m, y_n) . Однако, как было указано выше, подобный метод требует тщательную подготовку обучающих данных и понимание для каких функций обученная сеть может применяться.

Выводы. Представленные в работе архитектуры нейронных сетей могут использоваться при моделировании задач теории упругости.

Автор выражает благодарность научному руководителю проф. И. В. Бойкову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Ventsel E., Krauthammer T. Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications. The Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania, 2001. P. 13–297.
2. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. М. : Вильямс, 2006. 1104 с.
3. Hopfield J. J. Neural networks and physical systems with emergent computational abilities // Proceedings of National Academy of Sciences. 1982. Vol. 79, № 8. P. 2554–2558.
4. Jordan M. I. Serial order: A parallel distributed processing approach // Institute for Cognitive Science Report 8604. San Diego : University of California, 1986. 40 p.
5. Elman J. L. Finding structure in time // Cognitive Science. 1990. P. 179–211.
6. Hochreiter S. Long short-term memory / S. Hochreiter, J. Schmidhuber // Neural Computation. 1997. Vol. 9, № 8. P. 1735–1780.
7. Chung J., Gulcehre C., Cho K., Bengio Y. Empirical Evaluation of Gated Recurrent Neural Networks on Sequence Modeling. 2014. URL: <https://arxiv.org/abs/1412.3555> (дата обращения: 02.05.2023).
8. Pattanayak S. Pro Deep Learning with TensorFlow: A Mathematical Approach to Advanced Artificial Intelligence in Python. Apress, 2017. 398 p.
9. Bharath Ramsundar B., Zadeh R. B. TensorFlow for Deep Learning: From Linear Regression to Reinforcement Learning. O'Reilly, 2018. 256 p.
10. Жерон О. Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn и TensorFlow. Концепции, инструменты и техники для создания интеллектуальных систем. СПб. : Вильямс, 2018. 688 с.
11. Шолле Ф. Глубокое обучение на Python. СПб. : Питер, 2018. 400 с.
12. Джулли А., Пал С. Библиотека Keras – инструмент глубокого обучения. М. : ДМК Пресс, 2017. 294 с.

Приближенное решение обратной задачи теории тонких пластин на нейронных сетях

Евгений Сергеевич Фролов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
fr0love@yandex.ru

Аннотация. Решается обратная коэффициентная задача теории тонких пластин с применением нейронных сетей. Приведен модельный пример.

Ключевые слова: тонкие пластины, общее дифференциальное уравнение прогиба тонких пластин, нейронные сети

Approximate solution of the inverse problem of the theory thin plates on neural networks

Evgeny S. Frolov

Penza State University, Penza, Russia
fr0love@yandex.ru

Abstract. The inverse coefficient problem of the theory of thin plates is solved using neural networks. A model example is given.

Keywords: thin plates, general differential equation of deflection of thin plates, neural networks

Тонкие пластины [1] изначально представляют собой плоские конструктивные элементы, ограниченные двумя параллельными плоскостями, называемыми *гранями*, и цилиндрической поверхностью, называемой *ребром* или *границей*. Образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны плоским граням. Расстояние между плоскими гранями называется толщиной (h) пластины. Предполагается, что толщина пластины мала по сравнению с другими характерными размерами граней (длина, ширина, диаметр и т.д.). Геометрически пластины ограничены либо прямыми, либо изогнутыми границами (рис. 1). Статические или динамические нагрузки, переносимые пластинами, преимущественно перпендикулярны их торцам.

Несущее действие пластины в определенной степени аналогично действию балок или тросов; таким образом, пластины могут быть аппроксимированы решеткой из бесконечного числа балок или сетью из бесконечного числа тросов, в зависимости от жесткости конструкций при изгибе. Такое двумерное структурное взаимодействие пластин

приводит к получению более легких конструкций и, следовательно, дает многочисленные экономические преимущества. Пластина, изначально плоская, развивает сдвигающие усилия, изгибающие и скручивающие моменты, чтобы противостоять поперечным нагрузкам. Поскольку грузы обычно перевозятся в обоих направлениях и поскольку жесткость при скручивании в изотропных пластинах весьма значительна, пластина значительно жестче балки сопоставимого пролета и толщины. Таким образом, тонкие пластины сочетают в себе малый вес и эффективность формы с высокой несущей способностью, экономичностью и технологичностью.

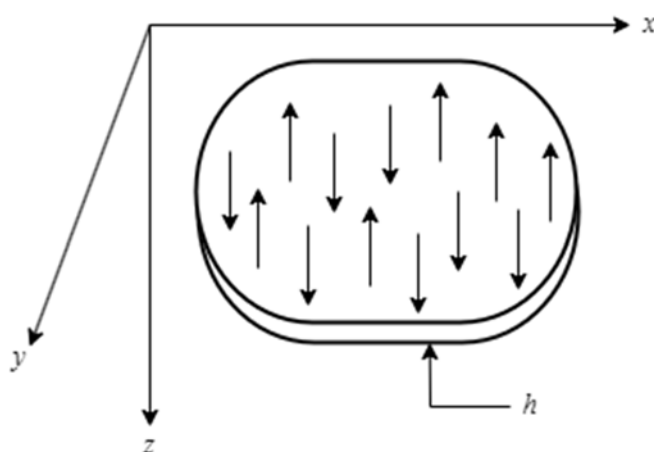


Рис. 1. Тонкая пластина

Благодаря неоспоримым преимуществам, рассмотренным выше, тонкие пластины широко используются во всех областях машиностроения. Пластины используются в архитектурных сооружениях, мостах, гидротехнических сооружениях, тротуарах, контейнерах, самолетах, ракетах, кораблях, приборах, деталях машин и т.д.

Указанные выше пластины могут быть описаны *основным дифференциальным уравнением* тонких пластин, которое определяется следующим образом:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D},$$

где w – отклонение от первоначального горизонтального состояния пластины, p – нагрузка, D – жесткость пластины при изгибе. Это уравнение было получено Лагранжем в 1811 году.

Для постановки обратной задачи рассмотрим более общее уравнение следующего вида

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \mu w(x, y) = \frac{p(x, y)}{D}, \quad (1)$$

где μ – постоянный коэффициент.

Обратная задача заключается в нахождении коэффициента μ при граничных условиях, задающихся выражениями

$$\begin{aligned} w(0, y) &= f_1(y), \quad w(a, y) = f_2(y), \\ w(x, 0) &= g_1(x), \quad w(x, b) = g_2(x), \end{aligned} \quad (2)$$

Для решения задачи (1), (2) воспользуемся нейронными сетями четырех видов:

- 1) полносвязная нейронная сеть [2];
- 2) рекуррентная нейронная сеть [3-5];
- 3) сеть *LSTM* [6];
- 4) сеть *GRU* [7].

Архитектура каждой сети определяется эмпирически на основе наблюдений и большого числа попыток решения задачи на обучающих данных, с целью нахождения наилучшего результата, как и практически во всех случаях, связанных с нейронными сетями.

Прежде чем переходить к обучению сетей необходимо подготовить обучающий набор данных. Зададим сетку равноотстоящих узлов x_m и y_n

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{a}{M} \cdot m, \quad m = 0, \dots, M, \\ y_n &= \frac{b}{N} \cdot n, \quad n = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (3)$$

где M и N – количество узлов по x и y соответственно.

Для каждой пары узлов (x_m, y_n) , $m = 0, \dots, M$, $n = 0, \dots, N$, рассчитаем значения функций $p(x, y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, которые вместе с узлами и жесткостью пластины D собираются в таблицу, вид которой представлен табл. 1.

Таблица 1

Обучающие данные для решения задачи (1), (2)

$f_1(y_0)$	...	$f_1(y_N)$	...	$g_1(x_0)$	...	$g_1(x_M)$	...	$p(x_0, y_0)$	...	D
...	...	...	...	...	...	...	...			

Каждая строчка табл. 1 соответствует некоторому известному значению коэффициента μ_k , которое высчитывается как

$$\mu_k = c + \frac{d - c}{K} \cdot k, \quad k = 0, \dots, K, \quad (4)$$

где c – начальное возможное значение коэффициента, d – конечное возможное значение коэффициента, K – количество коэффициентов.

Весь набор данных случайным образом разбивается на две части в соотношении 90 на 10 %, где 90 % используется для непосредственно как обучающие данные, а оставшееся 10 % как валидационные данные.

В качестве обучающих функций, для которых и будет строиться табл. 1, выступают функции

$$w_{mn}^{(1)}(x, y) = \begin{cases} \cos(nx)\sin(my), & n + m = 3, n \geq 0, m \geq 0, \\ \cos(3x), & m = 0, \end{cases}$$

и

$$w_{mn}^{(2)}(x, y) = \begin{cases} \sin(nx)\cos(my), & n + m = 3, n \geq 0, m \geq 0, \\ \cos(3y), & n = 0. \end{cases}$$

Необходимо отметить, что в качестве обучающих функций могут выступать любые непрерывные функции. Главным моментом тут является сама задача, для которой затем будет применяться обученная нейронная сеть. Вполне очевидно, что, используя для обучения сети тригонометрические функции на определенном промежутке, мы научим ее решать подобную задачу только для тригонометрических функций и только для определенного промежутка. Поэтому для более широкого применения данного метода имеет смысл расширять набор обучающих данных. Однако такой подход ведет к: увеличению ошибки сети, так как одинаковые выходы сети могут соответствовать разным наборам признаков, в данном случае значениям функций $p(x, y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$; увеличению общей сложности вычислений. Оба фактора влияют на точность и заставляют использовать более громоздкие архитектуры, требующие больших вычислительных мощностей и времени расчета. Поэтому обобщение сети на более широкий класс функций в целом является гораздо более трудоемкой и сложной задачей, чем может показаться на первый взгляд.

Рассмотрим решение следующей задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \mu w(x, y) &= 2 \cos x \cos y, \quad x \in [0, 2\pi], y \in [0, 2\pi], \\ w(0, y) &= \cos y, \quad w(2\pi, y) = \cos y, \\ w(x, 0) &= \cos x, \quad w(x, 2\pi) = \cos x. \end{aligned} \quad (5)$$

Точным значением коэффициента является $\mu = -2$.

Коэффициенты μ_k для обучающего набора высчитывались по формуле (4) в пределах от $c = -5$ до $d = 5$.

Результаты решения представлены в табл. 2 и 3, в которой архитектура сети указана без упоминания: первого или, как еще говорят, нулевого слоя, который ничего не делает, кроме проверки соответствия данных размерностям; и последнего слоя, представляющего собой один нейрон с линейной функцией активации, делающий окончательный вывод. В качестве функции потерь использовалась *среднеквадратическая ошибка*, которая в этом случае высчитывается как

$$MSE = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K (\mu_k - \bar{\mu}_k)^2,$$

где μ_k – точные значения, $\bar{\mu}_k$ – приближенные значения, предсказанные сетью.

Также в качестве дополнительной метрики отслеживания процесса обучения и точности сети выступает *средняя абсолютная ошибка*:

$$MAE = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K |\mu_k - \bar{\mu}_k|.$$

Построение нейронных сетей осуществлялось на языке программирования Python с использованием TensorFlow [8–10] и Keras [11, 12].

Таблица 2

Результаты решения задачи (5), $M = 10$, $N = 10$, $K = 1000$

Архитектура сети			Решающий алгоритм	MAE	MSE
Тип слоя	Количество нейронов	Функция активации			
Полносвязная нейронная сеть					
Dense	760	ReLU	SGD	0.03958476	0.00156695
Dense	888	tanh			
Dense	832	Swish			
Рекуррентная нейронная сеть					
SimpleRNN	576	SELU	SGD	0.01902413	0.0003619
SimpleRNN	1024	Swish			
SimpleRNN	856	GELU			
Сеть LSTM					
LSTM	704	ReLU	Adamax	0.13518894	0.01827605
LSTM	832	SELU			
LSTM	896	SELU			
Сеть GRU					
GRU	592	ReLU	Adamax	0.00820506	0.0000673229
GRU	184	ELU			
GRU	72	Swish			

Таблица 3

Результаты решения задачи (5), $M = 10$, $N = 10$, $K = 10000$

Архитектура сети			Решаю- щий ал- горитм	MAE	MSE
Тип слоя	Количе- ство нейро- нов	Функция актива- ции			
Полносвязная нейронная сеть					
Dense	760	ReLU	SGD	0.00126123	0.0000015907
Dense	888	tanh			
Dense	832	Swish			
Рекуррентная нейронная сеть					
Sim- pleRNN	576	SELU	SGD	0.00474107	0.0000224777
Sim- pleRNN	1024	Swish			
Sim- pleRNN	856	GELU			
Сеть <i>LSTM</i>					
LSTM	704	ReLU	Adamax	0.00321841	0.0000103582
LSTM	832	SELU			
LSTM	896	SELU			
Сеть <i>GRU</i>					
GRU	592	ReLU	Adamax	0.00915265	0.000083771
GRU	184	ELU			
GRU	72	Swish			

В итоге обученные сети хорошо справляются с поставленной задачей отыскания коэффициента μ , однако, сравнивая результаты в табл. 2 и 3, можно увидеть, что очень большую роль играет количество коэффициентов μ_k , чем меньше шаг между μ_k , тем выше точность. Также необходимо отметить, что представленные сети необходимо применять только вместе с понимаем на каких начальных данных они были обучены.

Выводы. Представленные в работе архитектуры нейронных сетей могут использоваться при моделировании задач теории упругости.

Автор выражает благодарность научному руководителю проф. И. В. Бойкову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Ventsel E., Krauthammer T. Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications. The Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania, 2001. P. 13–297.
2. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. М. : Вильямс, 2006. 1104 с.

3. Hopfield J. J. Neural networks and physical systems with emergent computational abilities // Proceedings of National Academy of Sciences. 1982. Vol. 79, № 8. P. 2554–2558.
4. Jordan M. I. Serial order: A parallel distributed processing approach // Institute for Cognitive Science Report 8604. San Diego : University of California, 1986. 40 p.
5. Elman J. L. Finding structure in time // Cognitive Science. 1990. P. 179–211.
6. Hochreiter S. Long short-term memory / S. Hochreiter, J. Schmidhuber // Neural Computation. 1997. Vol. 9, № 8. P. 1735–1780.
7. Chung J., Gulcehre C., Cho K., Bengio Y. Empirical Evaluation of Gated Recurrent Neural Networks on Sequence Modeling. 2014. URL: <https://arxiv.org/abs/1412.3555> (дата обращения: 02.05.2023).
8. Pattanayak S. Pro Deep Learning with TensorFlow: A Mathematical Approach to Advanced Artificial Intelligence in Python. Apress, 2017. 398 p.
9. Bharath Ramsundar B., Zadeh R. B. TensorFlow for Deep Learning: From Linear Regression to Reinforcement Learning. O'Reilly, 2018. 256 p.
10. Жерон О. Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn и TensorFlow. Концепции, инструменты и техники для создания интеллектуальных систем. СПб. : Вильямс, 2018. 688 с.
11. Шолле Ф. Глубокое обучение на Python. СПб. : Питер, 2018. 400 с.
12. Джулли А., Пал С. Библиотека Keras – инструмент глубокого обучения. М. : ДМК Пресс, 2017. 294 с.

Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, содержащих значения функции и ее производных

Шалва Соломонович Хубежты¹,
Любовь Юрьевна Плиева²

¹Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

²Южный математический институт – филиал ВНИИ РАН, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

¹shalva57@rambler.ru, ²plieva-21@mail.ru

Аннотация. Рассматривается сингулярный интеграл на отрезке интегрирования $[-1, 1]$ с весовой функцией $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Строятся квадратурные формулы

интерполяционного типа, алгебраической степени точности $2m-1$. При построении используются значения функции и ее производных в нулях многочлена Чебышева первого рода.

Ключевые слова: весовая функция, сингулярный интеграл, ортогональные многочлены, производные функции, квадратурные формулы, погрешность

Quadrature formulas for singular integrals containing the values of a function and its derivatives

Shalva S. Khubezhty¹, Lyubov Yu. Plieva²

¹North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia-Alania, Russia

²Southern Mathematical Institute – Branch of VSC RAS, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia-Alania, Russia

¹shalva57@rambler.ru, ²plieva-21@mail.ru

Abstract. We consider a singular integral on the integration interval $[-1, 1]$ with the weight function $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. A quadrature formula of interpolation type

with algebraic accuracy $2m-1$ is constructed. When constructing, the values of the function and its derivatives at the zeros of the Chebyshev polynomial of the first kind are used.

Keywords: weight function, singular integral, orthogonal polynomials, derivatives of functions, quadrature formulas, error

При решении сингулярных интегральных уравнений встречаются случаи, когда требуется найти не только значения неизвестной функции,

но и значения производных. Тогда для численного решения таких уравнений естественно требуется использовать квадратурные формулы, содержащие эти значения.

В данной работе и решается задача построения квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов, использующих значения функции и ее производных.

Итак, пусть заданы узлы $x_1, x_2, \dots, x_m$ и значения функции $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_m)$ и ее производных $\varphi'(x_1), \varphi'(x_2), \dots, \varphi'(x_m)$.

Наша задача сводится к построению квадратурной формулы вида:

$$\int_a^b p(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^m (A_k(x) \varphi(x_k) + B_k(x) \varphi'(x_k)) \quad (1)$$

Для того, чтобы построить такую формулу вначале построим интерполяционный многочлен Эрмита по значениям функции $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_m)$ и производных $\varphi'(x_1), \varphi'(x_2), \dots, \varphi'(x_m)$ в узлах $x_1, x_2, \dots, x_m$. Такой многочлен как известно [1-2] имеет вид:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\omega^2(x)}{\omega^2(x_i)(x-x_i)^2} \left[\varphi(x_i) \left(1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(x-x_i) \right) + \varphi'(x_i)(x-x_i) \right], \quad (2)$$

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^m (x-x_i), \quad \omega'(x) = \sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (x-x_j),$$

$$\omega''(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ k \neq i, j \neq i, k}}^m (x-x_j),$$

с остаточным членом

$$R_n(\varphi, x) = \frac{\varphi^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \omega^2(x). \quad (3)$$

Пусть $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, [a, b] = [-1, 1]$. Как известно многочленами $[-1, 1]$ ортогональными по данному весу на отрезке $[-1, 1]$ являются многочлены Чебышева первого рода $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, т. е. справедливы равенства

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) T_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n. \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя (2) вместо $\varphi(t)$ в (1), получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt &\approx \int_{-1}^1 \frac{p(t)}{t-x} \left\{ \sum_{i=1}^m \left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)} \right)^2 \times \right. \\ &\times \varphi(x_i) \left(1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(t-x_i) \right) + \varphi'(x_i)(t-x_i) \left. \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^m (A_i(x)\varphi(x_i) + B_i(x)\varphi'(x_i)), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$A_i(x) = \int_{-1}^1 \frac{p(t)}{t-x} \left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(t-x_i) \right) dt, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B_i(x) &= \int_{-1}^1 \frac{p(t)}{t-x} \left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)} \right)^2 (t-x_i) dt \\ &\quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя в (6) и (7) $\omega(t) = \frac{1}{2^{m-1}} T_m(t)$, $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$,

$x_i = \cos \frac{2i-1}{2m}$, ($i=1, \dots, m$) и используя известные формулы [1-4]

$$\frac{1}{(t-x)(t-x_i)} = \frac{1}{x-x_i} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t-x_i} \right) \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_n(t) Q(t) dt = 0, \quad (9)$$

где $Q(t)$ произвольный многочлен степени $< n-1$.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad (10)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)}{t-x} dt = \pi U_{n-1}(x), \quad U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (11)$$

$$T_n'(x) = n U_{n-1}(x). \quad (12)$$

После сложных преобразований для коэффициентов (6) и (7) квадратурной формулы (5) получим

$$A_i(x) = \frac{\pi}{T_m'^2(x_i)(x-x_i)} \left[\frac{1}{m} T_m'^2(x_i) + \frac{T_m(x)U_{m-1}(x)}{x-x_i} - \frac{T_m''(x_i)}{T_m'(x_i)} T_m(x)U_{m-1}(x) \right], \quad (13)$$

$$B_i(x) = \frac{\pi T_m(x)U_{m-1}(x)}{T_m'^2(x_i)(x-x_i)}. \quad (14)$$

($i = 1, 2, \dots, m$)

Окончательно получается следующая квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{T_i^2(x_i)(x-x_i)} \left\{ \left[-\frac{1}{m} T_m'^2(x_i) + \frac{T_m(x)U_{m-1}(x)}{x-x_i} - \frac{T_m''(x_i)}{T_m'(x_i)} T_m(x)U_{m-1}(x) \right] \varphi(x_i) + T_m(x)U_{m-1}(x) \varphi'(x_i) \right\} \quad (15)$$

Остаточный член квадратурной формулы (15) имеет вид:

$$R_n(\varphi; x) = \frac{1}{(2m)!} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi^{(2m)}(\eta)}{t-x} dt, \quad -1 < \eta < 1. \quad (16)$$

Рассмотрим частный случай для иллюстрации эффективности построенной квадратурной формулы (15). Пусть $m=2$, тогда $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $U_1(x) = 2x$. Для коэффициентов квадратурной формулы получим следующие выражения

$$A_1(x) = \frac{\pi}{2} (\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}), \quad A_2(x) = \frac{\pi}{2} (-\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}),$$

$$B_1(x) = \frac{\pi}{2} \left(x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \quad B_2(x) = \frac{\pi}{2} \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Квадратурная формула будет иметь вид:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \frac{\pi}{2} \left[(\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}) \varphi(x_1) + (-\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}) \varphi(x_2) + \left(x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ \left. * \right. \\ \left. * \varphi'(x_1) + \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \varphi'(x_2) \right] \quad (17)$$

Тестирование было проведено для функций $\varphi(t)=1$; $\varphi(t)=t$; $\varphi(t)=t^2$ и были получены точные результаты

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t-x} dt = 0; \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{t}{t-x} dt = \pi; \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{t^2}{t-x} dt = \pi x.$$

Список литературы

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М. : Наука, 1967. 500 с.
2. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функции. М. ; Л. : РТТН, 1954. 328 с.
3. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. : Янус, 1995. 520 с.
4. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. Владикавказ : ЮМИ ВНИЦ РАН, 2011. 235 с.

Сравнение реализаций блочного алгоритма FDTD-метода на графическом процессоре

Егор Евгеньевич Читоркин¹,
Димитрий Львович Головашкин²

¹Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева, Самара, Россия

^{1,2}Институт систем обработки изображений –
филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия

¹egor.chitorckin@yandex.ru

Аннотация. Сравняются две реализации одного блочного алгоритма разностного решения уравнений Максвелла, предназначенных для запуска на графических процессорах. Сравнение упомянутых реализаций показало, что реализация на CUDA C обладает преимуществами по отношению к реализации на CUDA Fortran; вид зависимости времени выполнения блочного варианта программы от высоты блока одинаков для обеих реализаций.

Ключевые слова: FDTD-метод, CUDA C, CUDA Fortran, блочный алгоритм DiamondTorre

Comparison of realizations of the block algorithm of the FDTD method on GPU

Egor E. Chitorkin¹, Dimitriy L. Golovashkin²

¹Samara National Research University, Samara, Russia

^{1,2}Image Processing System Institute –
Branch of the FSRC «Crystallography and Photonics» RAS, Samara, Russia

¹egor.chitorckin@yandex.ru

Abstract. Two realizations of one block algorithm for the difference solution of Maxwell's equations designed to run on GPUs are compared. A comparison of the mentioned realizations showed that the CUDA C implementation has advantages over the CUDA Fortran implementation; the type of dependence of the execution time of the block version of the program on the block height is the same for both implementations.

Keywords: FDTD-method, CUDA C, CUDA Fortran, block algorithm DiamondTorre

Введение

Известны многочисленные реализации FDTD-метода (разностное решение уравнений Максвелла, применяется в оптике и электродинамике) на графических процессорах [1, 2]. Существенной проблемой

при этом является ограничение на объем видеопамяти, как правило существенно меньший, чем оперативная память. Так, гибридный вычислительный комплекс К-100 располагает суммарной оперативной памятью в 6144 Гб и суммарной видеопамятью всего в 480 Гб (96 Гб и 3х2,5 Гб на узел соответственно) [3]. Решение в настоящее время находят в использовании блочных алгоритмов [4], реализованных на CUDA C – расширении языка C для программирования на видеокартах посредством использования технологии CUDA. При этом известны реализации FDTD-метода на языках Matlab [6] и Python [7], допускающих вычисления на GPU.

Цель данной работы: на тестовом примере одномерного случая выяснить, какой язык больше подходит для организации блочных вычислений по FDTD-методу на GPU. Языки Python и Matlab в данной работе не рассматриваются, так как являются интерпретируемыми и явно проигрывают в производительности компилируемым языкам C и Fortran, сравнению которых и посвящена данная работа.

Реализация схемы Yee на графическом процессоре при условии достаточности видеопамяти

При программной реализации разностной схемы YEE за основу был взят код С. Хагнесс на Matlab, прилагаемый к работе [8]. Его авторское переложение на GPU можно выразить следующим алгоритмом:

- инициализация начальных данных массивов, N – число временных слоев;

- цикл по $i = 1:N$

- вызов ядра вычисления E_z ;

- вызов ядра вычисления H_y ;

Отметим, что цикл предваряется загрузкой массивов в видеопамять. Далее представлен фрагмент кода ядра на C:

```

1 int idx = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x;
2 if (idx < step + 1) {
3     if (idx == step)
4         dev_Ex[step] = dev_Ex[step - 1];
5     else {
6         if (idx == 0)
7             dev_Ex[idx] = sin(current_timestep * 2 * pi * 1e10 * dt);
8         else
9             dev_Ex[idx] = dev_Ex[idx] - coe_Ex*(dev_Hy[idx] -
dev_Hy[idx - 1]);
10    }
11 }
```

В строке 1 происходит вычисление индекса нити; в строке 2 проверяется вхождение нити в расчетную область (может оказаться так, что длина массива не кратна BlockDim); в строках 3 и 6 проверяется соответствие индекса нити граничным узлам сеточной области, инструкции

для которых приведены в строках 4 и 7 соответственно; в строке 9 реализуются вычисления по разностной схеме Yee.

Реализация на Fortran отличается лишь способом определения индекса нити и индексами в условных операторах, т.к. способы индексации на языках C и Fortran различны.

Вычислительный эксперимент проводился на следующей программно-аппаратной базе: персональный компьютер с операционной системой Linux Ubuntu 20.04.4 (GNU/Linux 5.10.16.3) с объемом оперативной памяти 16 Гб, центральным процессором Intel Core-i7 и графическим процессором Nvidia GeForce GTX 1650 с объемом видеопамати 4 Гб, компиляторы nvcc 11.7 и nvfortran 22.5-0. Количество узлов по пространству K увеличивалось до тех пор, пока массивы не перестали помещаться в видеопамать, количество временных слоев было взято $N = 1000$.

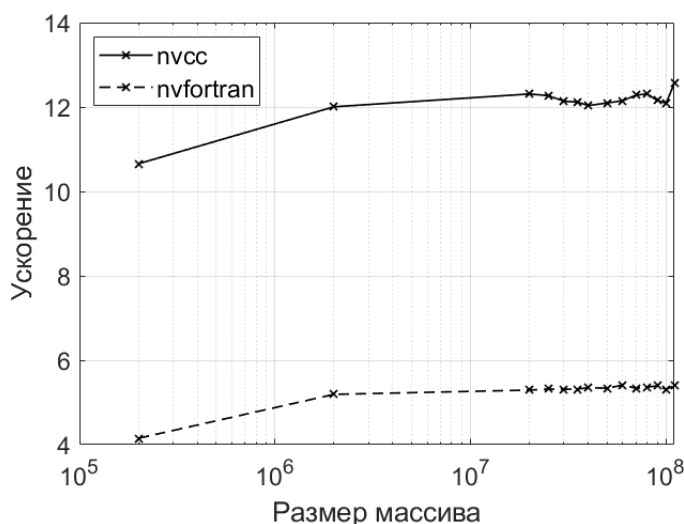


Рис. 1. График зависимости ускорения вычислений от размера массива K (сплошная линия – реализация на CUDA C, пунктирная – на CUDA Fortran)

Из графиков видно, что, начиная с $K = 20$ млн, ускорение существенно меняться для обеих реализаций, причем ускорение, получаемое на C, более чем в 2 раза превышает ускорение, получаемое на Fortran. При этом время вычислений на CUDA C меньше времени вычислений на CUDA Fortran. Это можно объяснить тем, что компилятор nvcc разрабатывался компанией Nvidia, которая занимается разработкой графических процессоров, поддерживающих CUDA, тогда как компилятор nvfortran разработан сторонней фирмой PGI, которой могли не предоставить часть информации о возможностях графических процессоров.

Блочный алгоритм FDTD-метода и его программная реализация

Реализуя блочный алгоритм по примеру из [4], изобразим разбиение на блоки (рис. 2).

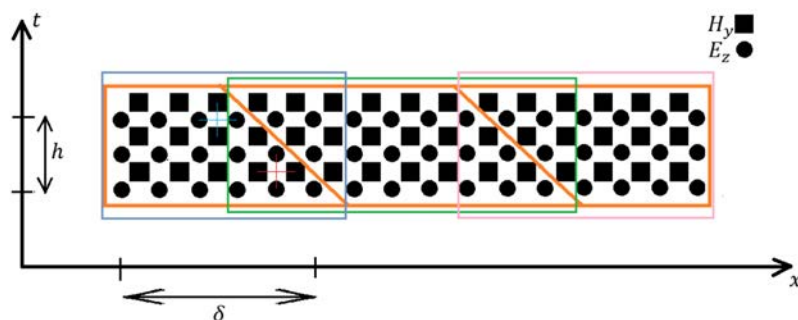


Рис. 2. Формирование блоков пересылаемых данных

Описанный алгоритм был реализован на языках Fortran и C с использованием технологии CUDA. Для этого для каждого из блоков (крайний левый, крайний правый, центральные) были реализованы функции кода ядра, причем на каждый блок приходится по две таких функции: для вычисления E_z и H_y . Данные функции являются по своей логике однотипными: вычисляется линейный индекс массива для данной нити и проводятся вычисления по разностной схеме для узла с найденным номером. Полная реализация состоит из следующих этапов:

- инициализация начальных данных массивов, N – число временных слоев, h – высота блока, M – число блоков;
- цикл по $i = 1:N/h$
- цикл по $j = 1:h$
 - вызов ядра вычисления E_z в крайнем левом блоке;
 - вызов ядра вычисления H_y в крайнем левом блоке;
- цикл по $k = 1:M-1$
 - цикл по $j = 1:h$
 - вызов ядра вычисления E_z в блоке с номером k ;
 - вызов ядра вычисления H_y в блоке с номером k ;
- цикл по $j = 1:h$
 - вызов ядра вычисления E_z в крайнем правом блоке;
 - вызов ядра вычисления H_y в крайнем правом блоке.

Определяя размер блока, воспользуемся результатами предыдущего пункта. В силу того, что ускорение перестает существенно меняться, начиная с $K = 20$ млн, в качестве размера блока примем максимальный размер массива, который помещается в видеопамять, т.е. 110 млн элементов типа *double*.

На основе графиков можно сделать вывод, что имеет место гиперболическая зависимость времени выполнения программы от высоты блока. Отметим, что, начиная с определенного значения h , время выполнения программы перестает значительно уменьшаться, так как количество коммуникаций уменьшается далее почти не меняется. Поэтому в качестве высоты блока необязательно брать число временных слоев, можно брать меньшую высоту, но так, чтобы количество блочных слоев

оставалось относительно небольшим. Например, для рассмотренного примера можно ограничиться высотой блока $h = 100$, что соответствует 10 блочным слоям, ведь проигрыш во времени по сравнению с $h = 1000$ крайне мал.

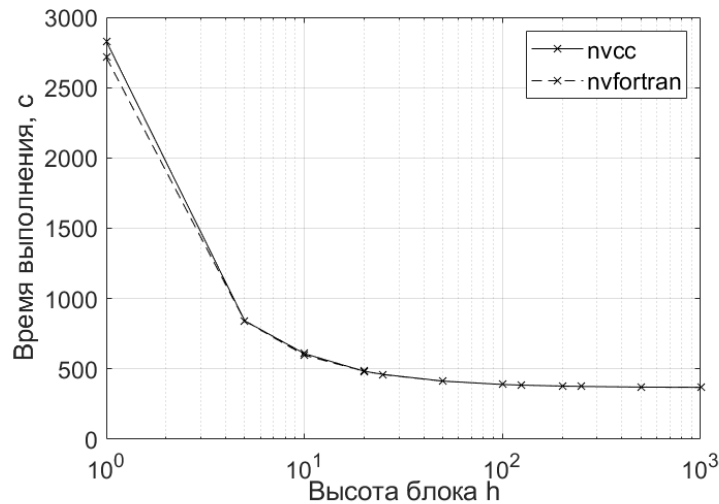


Рис. 3. График зависимости времени выполнения программы от высоты блока для случая четырех блоков

Таким образом, при выбранной программно-аппаратной базе преимуществами обладает язык C, так как перенос вычислений на GPU дает в 2 раза большее ускорение при использовании C по сравнению с Fortran. За объяснение тому авторы принимают отношение разработчиков компиляторов к производству выбранного GPU. Для обеих реализаций был реализован блочный алгоритм DiamondTorge, установлено, что отличия в реализациях чисто синтаксические. Вид зависимости времени выполнения программы от высоты блока одинаков для обеих реализаций, что подтверждает корректность произведенного сравнения.

Список литературы

1. Kakue T. [et al.]. Hologram generation of light-in-flight recording by holography applying the 2D-FDTD method to simulate the behavior of ultrashort pulsed light // OSA Continuum. 2021. Vol. 4 (2). P. 437–454.
2. Gunawardana M., Kordi B. GPU and CPU Based Parallel FDTD Methods for Frequency-Dependent Transmission Line Models // IEEE Letters on Electromagnetic Compatibility Practice and Applications. 2022. Vol. 4 (3). P. 66–70.
3. ЦКП ИПМ им. М. В. Келдыша РАН : сайт. URL: <https://ckp.kiam.ru/?hard> (дата обращения: 27.02.2023).
4. Закиров А. [и др.]. Алгоритм DiamondTorge и высокопроизводительная реализация конечно-разностного метода FDTD для суперкомпьютеров с графическими процессорами // Russian Supercomputing Days 2016 (26–27 сентября 2016, Москва, Россия). М., 2016. С. 80–94.

5. Lei J. [et al.]. Analysis of GPR Wave Propagation in Complex Underground Structures Using CUDA-Implemented Conformal FDTD Method // International Journal of Antennas and Propagation. 2019. Vol. 2019. P. 1–11.
6. Морунов Н. Д., Головашкин Д. Л. Организация вычислений по FDTD-методу на графических процессорах суперкомпьютера «Сергей Королёв» с использованием языка MATLAB // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2020) : материалы Междунар. конф. и молодёжной школы (г. Самара, 26–29 мая 2020 г.). Самара : Изд-во Самар. ун-та, 2020. С. 520–524.
7. Aleynikov P., Marushchenko N. B. 3D full-wave computation of RF modes in magnetised plasmas // Computer Physics Communications. 2019. Vol. 241. P. 40–47.
8. Taflove A., Hagness S. Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method. 3rd ed. Norwood : Artech House, 2005. 1006 p.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 378:004

Задача о распространении ТЕ-волны в плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой

Анна Александровна Дюндяева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
andyundyaeva@gmail.com

Аннотация. Исследуется нелинейная задача на собственные значения, описывающая распространение ТЕ-волны в плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой. В работе получены результаты, устанавливающие разрешимость задачи, а также представлены некоторые численные результаты.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, задача на собственные значения, плоский диэлектрический волновод, нелинейная среда, неоднородная среда, закон Керра

The problem of TE-wave propagation in a flat dielectric waveguide filled with nonlinear inhomogeneous medium

Anna A. Dyundyaeva

Penza State University, Penza, Russia
andyundyaeva@gmail.com

Abstract. A nonlinear eigenvalue problem describing TE-wave propagation in a plane dielectric waveguide filled with nonlinear inhomogeneous medium is studied. The paper provides results establishing the solvability of the problem, and presents some numerical results.

Keywords: nonlinear boundary problem, eigenvalue problem, plane dielectric waveguide, nonlinear medium, nonhomogeneous medium, Kerr law

Введение

В нелинейной оптике для моделирования нелинейной однородной среды широко используется закон Керра, имеющий вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \alpha |\mathbf{E}|^2, \quad (1)$$

где ε_1 , α есть вещественные постоянные, и E есть напряженность электрического поля.

Заметим, что в средах, заполняющих реальные волноводы, всегда присутствует некоторая концентрация примесей, вызывающая небольшие отклонения в диэлектрической проницаемости. Классический закон Керра этого не учитывает. Для того, чтобы учесть данный эффект, можно модифицировать формулу (1) следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \alpha|E|^2, \quad (2)$$

где β есть вещественная постоянная, которая считается достаточно малой и ε_2 есть непрерывная функция пространственной переменной.

Слагаемое $\beta\varepsilon_2$ в (2) призвано учесть небольшие отклонения в диэлектрической проницаемости среды.

В данной работе рассматривается задача о распространении ТЕ-волны в плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой.

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитную ТЕ-волну $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= e^{i\gamma z} (0, E_y(x), 0)^T, \\ \mathbf{H} &= e^{i\gamma z} (H_x(x), 0, H_z(x))^T, \end{aligned} \quad (3)$$

есть комплексные амплитуды [1], ω – круговая частота, γ – вещественный параметр, которая распространяется в плоском диэлектрическом волноводе толщины h , заполненном средой с проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2(x) + \alpha|E|^2$, где $\varepsilon_1, \alpha > 0$ и β – постоянные, а $\varepsilon_2(x)$ есть непрерывная функция пространственной переменной. Геометрия задачи представлена на рис. 1.

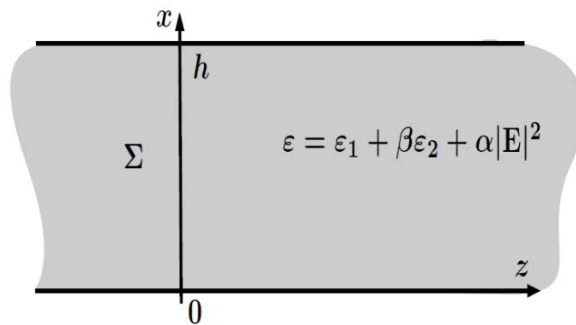


Рис. 1. Геометрия задачи

Амплитуды (3) удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (4)$$

компонента E_y , будучи касательной, обращается в нуль на абсолютно проводящих стенках [2], т.е. при $x=0$ и $x=h$, а E'_y имеет фиксированное значение при $x=0$.

Подставляя (3) в уравнения Максвелла (4), получаем уравнение

$$u''(x) = \gamma^2 u(x) - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 (\epsilon_1 + \beta \epsilon_2(x) + \alpha u^2(x)) u(x),$$

где $u(x)E_y(x)$. Пусть $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$. Заменяя в полученном уравнении величины по формулам $\tilde{x} = k_0 x$, $\tilde{\gamma} = k_0^{-1} \gamma$ и опуская знак тильды, получаем

$$u'' = -(\epsilon_1 + \beta \epsilon_2(x) - \gamma^2) u - \alpha u^3. \quad (5)$$

Задача P_α^β состоит в нахождении таких $\gamma = \hat{\gamma} > 0$, что существует решение $u(x; \hat{\gamma}) \in C^2[0; h]$ уравнения (5), удовлетворяющее условиям

$$u(0; \hat{\gamma}; \alpha; \beta) = 0, \quad u'(0; \hat{\gamma}; \alpha; \beta) = A, \quad (6)$$

$$u(h; \hat{\gamma}; \alpha; \beta) = 0, \quad (7)$$

где A – положительная постоянная.

Если в уравнении (5) положить $\beta = 0$, то задача P_α^β вырождается в задачу P_α , ее собственные значения будем обозначать как $\bar{\gamma}$. Если в уравнении (5) положить $\alpha = 0$, то задача P_α^β вырождается в линейную задачу P_0 , ее собственные значения будем обозначать как $\tilde{\gamma}$.

2. Основные результаты

Утверждение 1. Задача P_0 имеет не более чем конечное число собственных значений $\tilde{\gamma}$; если $\beta = 0$ (однородный случай), то все решения P_0 лежат в интервале $\gamma \in (0, \sqrt{\epsilon_1})$.

Используя классические методы теории возмущений и решения линейной задачи P_0 , можно найти некоторые собственные значения задачи P_α^β . Однако, такой подход не позволяет найти лишь линеаризуемые решения задачи P_α^β , тогда как она может иметь и другие решения. Ввиду этого в данной работе разработан и применен модифицированный метод возмущения, использующий решения более простой нелинейной задачи P_α .

Теорема 1. Задача P_α имеет бесконечно много положительных собственных значений $\gamma = \bar{\gamma}$ с точкой накопления на бесконечности.

Определим множество $\Gamma = [0, \gamma_0]$, где $\gamma_0 > 0$ есть некоторая постоянная.

Разрешимость задачи P_α^β устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть задача P_α имеет n решений $\bar{\gamma}_k \in \Gamma$, где $k = \overline{1, n}$. Тогда существует $\beta_0 > 0$ такое, что для любого $\beta \in (-\beta_0, \beta_0)$ задача P_α^β имеет по крайней мере одно решение $\hat{\gamma}_k$ в окрестности $\bar{\gamma}_k$ и $\lim_{\beta \rightarrow 0} \hat{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k$ для каждого $k = \overline{1, n}$.

Доказательство теоремы 2 представлено в [3].

Теорема 2 устанавливает существование n решений задачи P_α^β , если задача P_α имеет n решений в Γ и $|\beta|$ достаточно мало. Здесь целое число n может быть сколь угодно большим, но это влияет на верхнюю границу β_0 допустимых значений β ; а именно, чем больше n , тем меньше β_0 . Пытаясь перейти к пределу $n \rightarrow +\infty$, получаем $\beta_0 \rightarrow 0$. Другими словами, в этом случае задача P_α^β вырождается в задачу P_α .

Если γ_0 достаточно велико, то по крайней мере некоторые собственные значения $\bar{\gamma}_k \in \Gamma$ не обладают парой среди линейных решений. Это означает, что те собственные значения $\hat{\gamma}_k$, для которых $\lim_{\beta \rightarrow 0} \hat{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k$, где $\bar{\gamma}_k \in \Gamma$ не линеаризуемо, также нелинеаризуемы.

На рис. 2 и 3 представлены численные результаты работы, а именно дисперсионные кривые задач P_α и P_α^β , отражающие зависимость постоянных распространения волновода от его толщины.

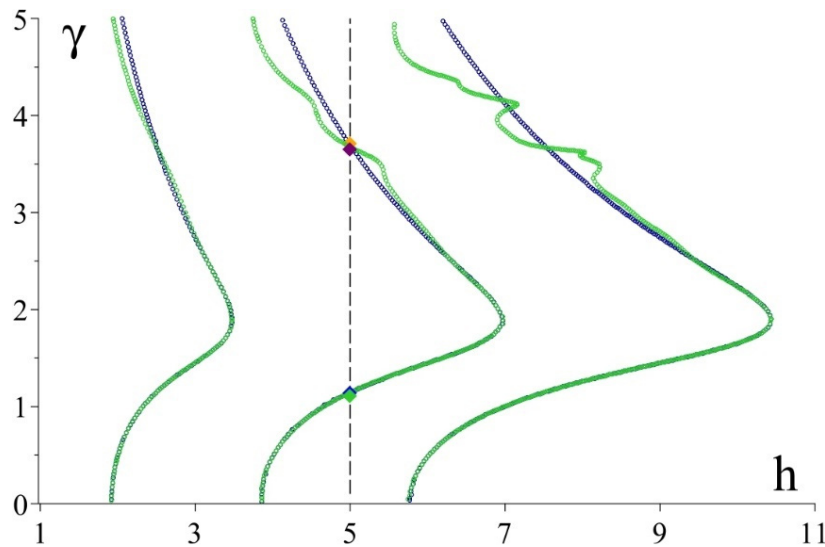


Рис. 2. Дисперсионные кривые задачи P_α (синяя кривая) с $\varepsilon = 2.405$

и задачи P_α^β (зеленая кривая) с $\varepsilon = 2.405 + 0.05 \cos(10x)$.

Ромбы обозначают собственные значения задач P_α и P_α^β

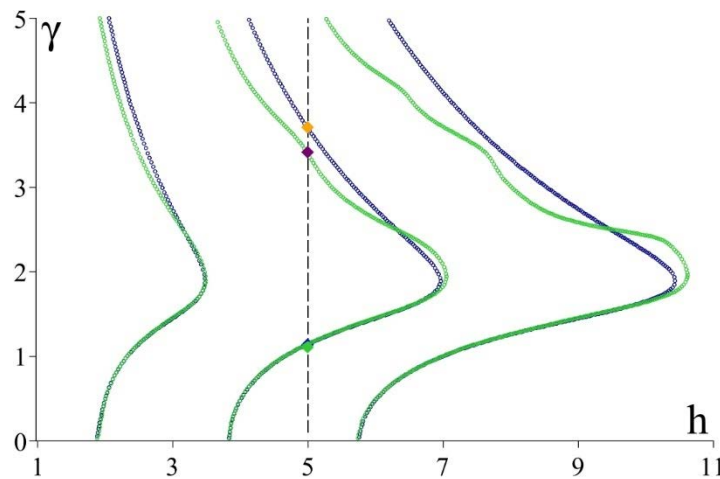


Рис 3. Дисперсионные кривые задачи P_α (синяя кривая) с $\varepsilon = 2.405$ и задачи P_α^β (зеленая кривая) с $\varepsilon = 2.405 + 0.05 \cos(4x)$. Ромбы обозначают собственные значения задач P_α и P_α^β

Представленные результаты призваны наглядно продемонстрировать, что при достаточно малых значениях параметра β задача P_α^β имеет решения, которые находятся в окрестности решений P_α ; стоит отметить, что некоторые из этих решений являются нелинеаризуемыми.

Заключение

Итак, в данной работе исследована нелинейная краевая задача, описывающая распространение ТЕ-волны в плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой. Основным результатом работы является теорема 2, устанавливающая существование решений исследуемой задачи, в частности таких решений, которые не связаны с решениями соответствующей линейной задачи, а значит не могут быть получены с помощью классических методов теории возмущения.

Список литературы

1. Eleonskii P. N., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P. Cylindric Nonlinear Waveguides // Soviet Physics JETP. 1972. Vol. 35, № 1. P. 44–47.
2. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1988. 440 с.
3. Dyundyaeva A., Tikhov S., Valovik D. Transverse Electric Guided Wave Propagation in a Plane Waveguide with Kerr Nonlinearity and Perturbed Inhomogeneity in the Permittivity Function // Photonics. 2023. Vol. 10, № 4. 371 с.

Расчет волноводных фотонно-кристаллических структур с изгибами с помощью генетического алгоритма

**Юлиана Юрьевна Кривошеева¹,
Димитрий Львович Головашкин²**

¹Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева, Самара, Россия

^{1,2}Институт систем обработки изображений – филиал ФНИЦ
«Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия

¹krivosheeva.yu.yu@gmail.com

Аннотация. С помощью генетического алгоритма оптимизируются структуры, соответствующие изгибам фотонно-кристаллического волновода на 60° и 120°. Показано, что полученные в результате генетической оптимизации параметры обеспечивают передачу энергии через изгиб практически без потерь. **Ключевые слова:** фотонные кристаллы, изгиб волновода, генетический алгоритм

Design of waveguide photonic-crystal structures with bends using a genetic algorithm

Yuliana Yu. Krivosheeva¹, Dimitriy L. Golovashkin²

¹Samara National Research University, Samara, Russia

^{1,2}Image Processing System Institute – Branch of the FSRC «Crystallography and Photonics» RAS, Samara, Russia

¹krivosheeva.yu.yu@gmail.com

Abstract. By means of a genetic algorithm, the structures of the bends of the photonic-crystal waveguide at 60° and 120° are optimized. It is shown that the parameters obtained as a result of genetic optimization provide energy transfer through the bend without loss.

Keywords: photonic crystal, waveguide bend, genetic algorithm

Введение

Компоновка на одном кристалле оптической интегральной схемы неизбежно сопровождается изгибами волноводных структур. Очевидно, при резком изгибе волновода возникают проблемы со смешением мод, что может привести к отражениям и потерям энергии при передаче сигнала. В [1] показано: лишь для некоторых частот при ТЕ-поляризации можно получить передачу через изгиб до 90 % без изменения структуры кристалла с гексагональной решеткой и

воздушными отверстиями. Минимизируя потери, следует, согласно [2], изменять кристаллическую структуру вблизи изгиба посредством варьирования радиуса одного из диэлектрических стержней на стыке перпендикулярных фрагментов фотонно-кристаллического волновода с квадратной решеткой. При этом удастся полностью избежать энергетических потерь. В [3], путем смещения набора воздушных отверстий, образующих изгиб волновода на 60° в гексагональной решетке, была получена энергетическая эффективность в 95 %. Авторы [4] для улучшения передачи сигнала через изгиб в 60° применили метод топологической оптимизации.

Все упомянутые выше методы являются локальными, т.е. не гарантируют сходимости к оптимальному результату. Поэтому для расчета изгибов используются и генетические методы, являющиеся глобальными. Например, в [5] генетический алгоритм применен для улучшения передачи через изгибы в 90° и 120° путем оптимизации радиусов кремниевых стержней. Полученные значения эффективности передачи составили 93 и 100 % соответственно. Однако, вычисления проводились для кристалла, малые геометрические размеры которого допускают влияние падающей (и не проникающей глубоко в структуру) волны на интерференцию в области изгиба. Вероятно, это связано с высокой вычислительной сложностью решения обратной задачи дифракции.

Для решения ряда задач фотоники представляется актуальным исследование изгибов волноводов на базе фотонных кристаллов с воздушными отверстиями (кавернами) на подложке из кремния [6], изготовление которых технологичнее, чем формирование столбцов. Авторам настоящего текста неизвестны работы по применению метода генетической оптимизации к таким изгибам. Предлагаемое исследование служит восполнению указанного пробела.

1. Генетический алгоритм

Исследуемый волновод представляет собой двумерный фотонный кристалл с гексагональной решеткой (каверны в подложке из кремния) и линейным дефектом, который получен путем удаления ряда каверн [6]. Рассмотрим два изгиба: первый получен путем стыковки фрагментов волноводов под углом 120° (рис. 1,а), второй – под углом 60° (рис.1,б). Для получения максимально возможной эффективности передачи будем оптимизировать радиусы воздушных каверн вблизи изгибов волноводов с помощью генетического алгоритма. На рис. 1 данные каверны обозначены цифрами 1, 2 и 3.

За эффективность передачи примем следующие отношение:

$$\delta = \frac{I_{out}}{I_{in}},$$

где – I_{out} интенсивность излучения на выходе из фрагмента волновода, задающего изгиб, I_{in} – интенсивность на входе (как при отсутствии изгиба [10]).

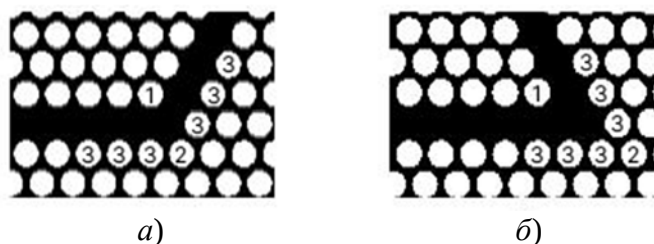


Рис. 1. Модели изгибов фотонно-кристаллических волноводов, a – изгиб на 120° , b – на 60°

В представленном далее генетическом алгоритме условимся понимать под одной особью $chromosome_i$ в популяции из N особей (i принимает значения от 1 до N) вектор из трех значений радиусов $\{r_1, r_2, r_3\}$. В начале алгоритма случайными числами в диапазоне от 0 до $a/2$, где a – период кристалла (расстояние между центрами соседних каверн) задается первая популяция и рассчитывается эффективность для каждой из особей. Далее выполняются стандартные операторы генетического алгоритма: отбор, скрещивание, мутация и формирование нового поколения. Рассмотрим упомянутые этапы в порядке их следования.

- **Отбор.** Отбор N особей для скрещивания происходит по методу колеса рулетки [7].

- **Скрещивание.** Для получения новой (дочерней) особи $chromosome_{icross}$, особи с номерами i и $i+1$ из набора, полученного в результате первого этапа (родительские), подвергаются одноточечному скрещиванию [7].

- **Мутация.** Для мутации с вероятностью 0,05 (следуя [5]) выбираются гены из всей дочерней популяции, полученной на втором этапе, и их значения заменяются на случайные из диапазона 0 до $a/2$.

- **Формирование нового поколения.** Получение новой популяции связано с расчетом эффективности для всех особей, генерированных в ходе предыдущих этапов текущей итерации алгоритма, и их селекции. В ходе последней новое поколение формируется из 10 % лучших особей предыдущего поколения (прошлая итерация) и 90 % особей с наилучшим значением эффективности из полученного набора.

Этапы повторяются пока либо не достигается максимальная эффективность, либо не генерируется наперед заданное максимальное количество поколений.

При решении задачи из следующего пункта рассматривалось максимально 50 поколений по 10 особей в каждом. При этом алгоритм сошелся на 23 и 28 поколения для изгибов 120° и 60° соответственно. На рис. 2 представлены результаты работы алгоритма.

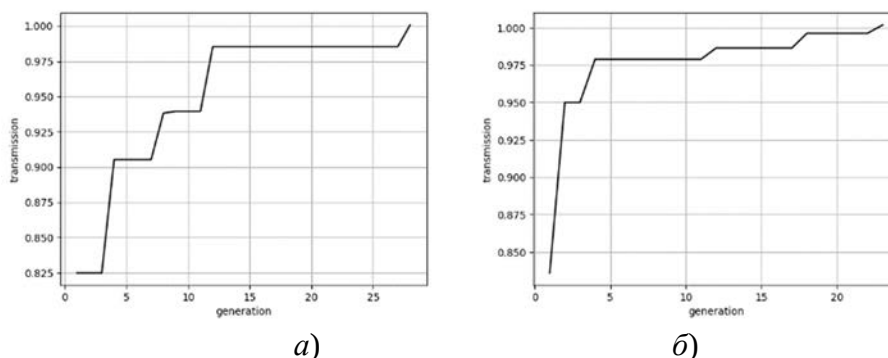


Рис. 2. Лучшая передача в поколении для (а) изгиба на 120°, (б) изгиба на 60°

2. Фотонно-кристаллические волноводные структуры с изгибами после оптимизации

Моделирование изгибов и расчет эффективности происходили в пакете Ansys Lumerical R1 (реализующем FDTD-метод решения уравнений Максвелла), а сам генетический алгоритм написан на языке Python (версия Python 3.11). Параметры фотонного кристалла взяты из работы [10]. Размеры вычислительной области выбирались равными по горизонтали и по вертикали. Расчеты проводились на неоднородной сеточной области (автоматически задается в пакете Ansys Lumerical) размерами 891x522 узлов и минимальным количеством узлов на длину волны равным 50.

Для изгиба волновода на 120° энергетическая эффективность до оптимизации составляла 0,1527, после превышала 0.99, а для изгиба на 60° передача до и после оптимизации составила 0,0288 и превышала 0.99 соответственно (табл. 1, рис. 3, 4).

Таблица 1

Радиусы каверн, полученные в результате генетической оптимизации

Изгиб	Эффективность до оптимизации	Эффективность после оптимизации	Оптимизированные радиусы, мкм		
			r_1	r_2	r_3
60°	0,0288	>0.99	0,199	0,083	0,083
120°	0,1527	>0.99	0,035	0,054	0,115

Из рис. 3 и 4 видно, что падающая волна не проникает глубоко в кристалл. Так как изгибы находятся на расстоянии $25a$ от входа волновода, то можно утверждать, что полученная передача исключает влияние падающей волны на интерференцию в области изгиба (в отличие от результатов [9]).

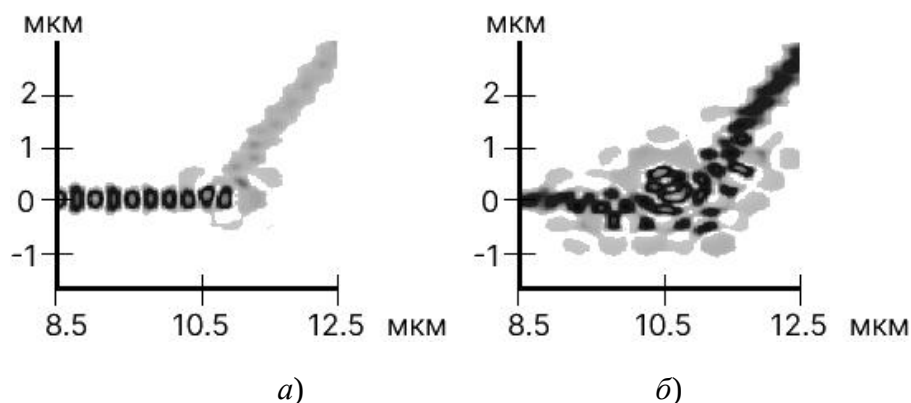


Рис. 3. Дифракционная картина (а) до и (б) после оптимизации изгиба волновода на 120°

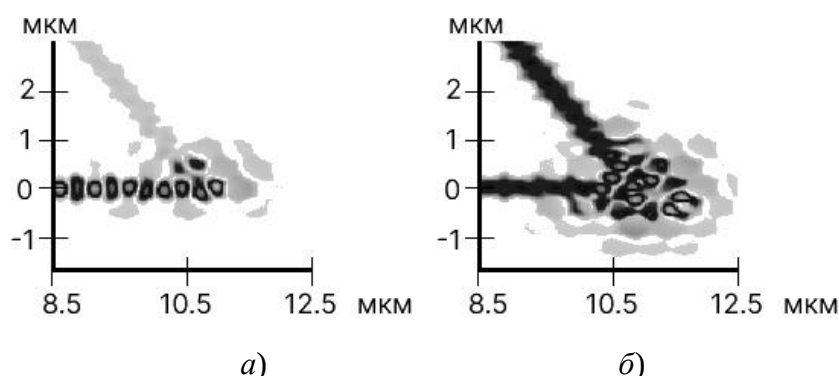


Рис. 4. Дифракционная картина (а) до и (б) после оптимизации изгиба волновода на 60°

Заключение

В работе представлен алгоритм расчета волноводных фотонно-кристаллических структур с изгибами, основанный на генетической оптимизации. С помощью данного алгоритма улучшены структуры изгибов фотонно-кристаллического волновода с гексагональной решеткой и воздушными кавернами на 60° и 120° . Для достижения максимально возможного значения эффективности передачи оказалось достаточным изменение радиусов трех каверн вблизи изгибов. Полученные в результате вычислительного эксперимента значения параметров обеспечивают более 99% передачу энергии в обоих случаях.

Список литературы

1. Alongkarn C., Susumu N. Waveguides and waveguide bends in two-dimensional photonic crystal slabs // Physical Review B. 2000. Vol. 62, iss. 7. P. 4488–4492.
2. Smajic J., Hafner C., Erni D., Design and optimization of an achromatic photonic crystal bend // Optics Express. 2003. Vol. 11. P. 1378–1384.
3. Iraklis N. [et al.]. Optimization of transmission properties of two-dimensional photonic crystal channel waveguide bends through local lattice deformation // Journal of Applied Physics. 2004. Vol. 96, iss. 1. P. 12–18.

4. Watanabe Y. [et al.]. Topology optimization of waveguide bends with wide, flat bandwidth in air-bridge-type photonic crystal slabs // Journal of Applied Physics. 2007. Vol. 101. P. 113108.
5. Liyong Jiang [et al.]. Optimization of low-loss and wide-band sharp photonic crystal waveguide bends using the genetic algorithm // Optik. 2013. Vol. 124, iss. 14. P. 1721–1725.
6. Сошников Д. В. Оценка влияния технологических погрешностей изготовления на работу фотонно-кристаллических волноводов // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.). Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 128–133.
7. Jebari K., Madiafi M., Elmoujahid A. Parent Selection Operators for Genetic Algorithms // International Journal of Engineering Research & Technology. 2013. Vol. 2, iss. 11. P. 1141–1145.

Моделирование напряженно-деформированного состояния слоистой структуры при контактном взаимодействии

**Александр Николаевич Литвинов¹,
Дмитрий Владимирович Артамонов²**

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹allitvinov48@mail.ru, ²dmitrartamonov@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена контактная задача по исследованию напряженно-деформированного состояния слоистых структур при контактном взаимодействии. Предложен алгоритм и проведено математическое моделирование состояния многослойной структуры при действии на нее сосредоточенной нагрузки. Дана оценка размеров зон краевых эффектов при действии на слоистую структуру системы внешних сил.

Ключевые слова: многослойная структура, контактная задача, алгоритм, моделирование, напряженное состояние, краевой эффект

Modeling of the stress-strain state of a layered structure during contact interaction

Alexander N. Litvinov¹, Dmitry V. Artamonov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹allitvinov48@mail.ru, ²dmitrartamonov@yandex.ru

Abstract. The contact problem of studying the stress-strain state of layered structures in contact interaction is considered. An algorithm is proposed and mathematical modeling of the state of a multilayer structure under the action of a concentrated load on it is carried out. The size of the zones of edge effects under the action of external forces on the layered structure of the system is estimated.

Keywords: multilayer structure, contact problem, algorithm, modeling, stress state, edge effect

В современном приборо-, авиа- и специальном машиностроении в настоящее время широко применяются многослойные структуры, позволяющие обеспечивать высокую виброударостойкость аппаратуры и оборудования различного назначения [1], а также износостойкость ответственных трибосопряжений специальных изделий [2]. При этом большое практическое значение имеют контактные задачи для многослойных структур. Так как в большинстве случаев площадки контакта являются достаточно малыми [3], контактную модель можно свести

к действию сосредоточенной силы P на слоистое полупространство (рис. 1), где $k = 0, 1, 2, \dots, n$ – нумерация жестких слоев.

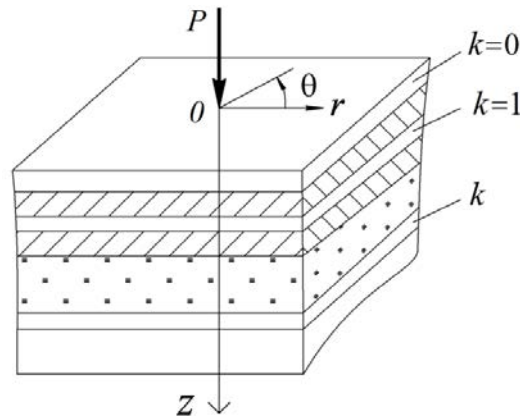


Рис.1 Элемент конструкции

В качестве обобщенной модели слоистой структуры примем модель В. В. Болотина и введенную им классификацию слоев [4]. Считаем, что в общем случае структура состоит из чередующихся жестких и мягких слоев. Верхний слой, воспринимающий внешнюю нагрузку, является жестким ($k = 0$). В соответствии с принятой моделью жесткие слои работают на растяжение (сжатие) с изгибом, а мягкие слои работают на сдвиг. При этом деформации мягких слоев определяются через перемещения жестких слоев [4].

Задача решается в цилиндрической системе координат rQz . В силу осевой симметрии компоненты тензоров напряжений, деформаций, а также вертикальные w_k и радиальные u_k перемещения жестких слоев являются функциями радиальной r и осевой z координат.

Рассмотрим случай, когда гетерогенная структура является регулярной, т.е. физико-механические и геометрические характеристики слоев являются одинаковыми: E, ν, h – модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина жесткого слоя; G, s – модуль сдвига и толщина мягкого слоя; E_m – трансверсальный модуль упругости мягкого слоя, характеризующий жесткость слоя в направлении оси z .

В этом случае получим систему дифференциально-разностных уравнений, определяющих поле перемещений в жестких слоях структуры:

– для верхнего (нагруженного) слоя (при $k=0$)

$$A \left(\Delta u_0 - \frac{u_0}{r^2} \right) + B \left[u_1 - u_0 + C \left(\frac{dw_1}{dr} + \frac{dw_0}{dr} \right) \right] = 0, \quad (1)$$

$$D \Delta w_0 - C(w_1 - w_0) - BC [\nabla u_1 - u_0 + c_0 (\Delta w_1 + \Delta w_0)] = \frac{P}{2\pi r} \delta(r);$$

– для остальных слоев ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$A \left(\Delta u_k - \frac{u_k}{r^2} \right) + B \left[u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} + C \left(\frac{dw_{k+1}}{d^2} - \frac{dw_{k-1}}{dr} \right) \right] = 0, \\ D \Delta \Delta w_k - C(w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}) - \\ - Bc_0 [\nabla u_{k+1} - u_{k-1} + c_0 (\Delta w_{k+1} + 2\Delta w_k + \Delta w_{k-1})] = 0. \quad (2)$$

Здесь $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ и $\nabla = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}$ – оператор Лапласа и оператор

градиента; r – текущий радиус, $\delta(r)$ – дельта функция, характеризующая приложение силы P в начале координат; $c_0 = 0,5(h+s)$; $c = h + s$; $A = Eh/(1-\nu)$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – жесткость слоя на растяжение и изгиб соответственно; $B = G/s$ – жесткость мягкого слоя на сдвиг; $C = E_m/s$ – трансверсальная жесткость.

Решение уравнений (1), (2) должно удовлетворять условиям ограниченности деформаций и напряжений при $k \rightarrow \infty$, а перемещения u_k и w_k должны стремиться к нулю при $r \rightarrow \infty$ в соответствии с решением задачи Буссинеска [5]. Решение системы уравнений (2) ищется методом интегральных преобразований Фурье-Бесселя. Уравнения (1) при этом играют роль граничных условий.

Полагаем

$$u_k(r) = \int_0^\infty U_k(p) p J_1(pr) dp; \quad w_k(r) = \int_0^\infty W_k(p) p J_0(pr) dp, \quad (3)$$

где $U_k(p)$ и $W_k(p)$ – изображения по Фурье-Бесселю от функции перемещений $u_k(r)$ и $w_k(r)$; J_1 и J_0 – функции Бесселя; p – параметр преобразования.

После выполнения преобразования над уравнениями (1) и (2) получим систему конечно-разностных уравнений для изображений $U_k(p)$ и $W_k(p)$. Решая эту систему и, переходя от изображений к оригиналам (3), получим выражения, определяющие поле перемещений в каждом жестком слое, зависящее от текущего безразмерного радиуса $\bar{r}$:

$$u_k(\bar{r}) = \frac{Pc^2}{2\pi D} \chi \int_0^\infty \frac{t^2}{g} \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_{j+1} sh(\mu_j) \cdot \exp(-k\mu_j) J_1(\bar{r}t) dt; \\ w_k(\bar{r}) = \frac{Pc^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{t}{g} \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_{j+1} \cdot f_j \cdot \exp(-k\mu_j) J_0(\bar{r}t) dt. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения: $a_j = 1 + \exp(\mu_j)$; $a_3 = a_1$; $g = a_1 b_2 - a_2 b_1$; $b_j = f_j [t^4 + \chi_1(1 - \exp(-\mu_j))] + \chi_2 t^4 [1 + \exp(-\mu_j)]$; $f_j = t^2 + 2\chi [1 - ch(\mu_j)]$ при $j = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots, n$; $\bar{r} = 2r/(h + s)$.

$$\chi = \frac{Gc^2(1-\nu^2)}{Ehs}, \quad \chi_1 = \frac{E_z c^4}{Ds}, \quad \chi_2 = \frac{Gc^4}{4Ds} - \text{безразмерные коэффициенты,}$$

характеризующие относительные сдвиговые и трансверсальные жесткости мягких слоев. Характеристические показатели μ_1 и μ_2 являются решениями характеристического уравнения:

$$ch^2\mu - 2\left(1 + \frac{t^2}{4\chi} + \frac{\chi - \chi_2}{4\chi\chi_1}t^4\right)ch\mu + 1 + \frac{t^2}{2\chi} + \frac{\chi + \chi_2}{2\chi\chi_1}t^4 + \frac{t^6}{4\chi\chi_1} = 0. \quad (5)$$

В зависимости от соотношений между параметрами слоев характеристические показатели могут принимать как действительные, так и комплексные значения. Решения, соответствующие характеристическим показателям с положительной действительной частью, следует исключить в соответствии с условиями ограниченности напряжений и перемещений в полупространстве при $z \rightarrow \infty$. Применяя обобщенный закон Гука [5], получим выражения для напряжений в жестких слоях:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,u}^{(k)} &= -\frac{3c^2}{\pi h^2} \sigma_o \int_0^\infty \frac{t^3}{g} \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_{j+1} \cdot f_j \cdot \exp(-k\mu_j) \cdot z_1(\bar{r}t) dt; \\ \sigma_{\theta,u}^{(k)} &= -\frac{3c^2}{\pi h^2} \sigma_o \int_0^\infty \frac{t^3}{g} \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_{j+1} \cdot f_j \cdot \exp(-k\mu_j) \cdot z_2(\bar{r}t) dt; \\ \sigma_{r,o}^{(k)} &= \frac{2c}{\pi h} \sigma_o \chi_2 \int_0^\infty \frac{t^3}{g} \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_{j+1} \cdot sh(\mu_j) \cdot \exp(-k\mu_j) \cdot z_1(\bar{r}t) dt; \\ \sigma_{\theta,o}^{(k)} &= \frac{2c}{\pi h} \sigma_o \chi_2 \int_0^\infty \frac{t^3}{g} \sum_{j=1}^2 a_{j+1} \cdot sh(\mu_j) \cdot \exp(-k\mu_j) \cdot z_2(\bar{r}t) dt; \text{ при } k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma_{r,u}^{(k)}, \sigma_{\theta,u}^{(k)}$ – радиальные и окружные напряжения изгиба k -го слоя;
 $\sigma_{r,o}^{(k)}, \sigma_{\theta,o}^{(k)}$ – напряжения растяжения (сжатия) этого слоя.

Результирующие напряжения в жестких слоях определяются как

$$\sigma_r^{(k)} = \sigma_{r,k}^{(k)} + \sigma_{r,0}^{(k)}; \quad \sigma_\theta^{(k)} = \sigma_{\theta,u}^{(k)} + \sigma_{\theta,0}^{(k)}. \quad (7)$$

Напряжения в мягких слоях определяются выражениями:

$$\tau_{r,z}^{[k]} = B_k \left[u_{k+1} - u_k + c'_k \frac{dw_k}{d_2} + c''_k \frac{dw_{k+1}}{d^2} \right]; \quad \sigma_z^{[k]} = c_k (w_{k+1} - w_k)$$

с учетом (4).

Здесь введены следующие обозначения: $\sigma_o = P/c^2$ – условное контактное напряжение; $z_1(\bar{r}t) = J_0(\bar{r}t) - \frac{1-\nu}{\bar{r}t} J_1(\bar{r}t)$;

$$z_2(\bar{r}t) = \nu J_0(\bar{r}t) + \frac{1-\nu}{\bar{r}t} J_1(\bar{r}t).$$

Интегралы, входящие в выражения (4)–(6), являются сходящимися для любого номера слоя k за исключением интегралов для изгибных напряжений $\sigma_{r,u}^{(0)}$ и $\sigma_{\theta,u}^{(0)}$ нулевого слоя, к которому приложена сосредоточенная сила P . Эти интегралы в окрестности точки приложения силы (при $\bar{r} = 0$) имеют особенность логарифмического типа, что полностью согласуется с известными результатами расчетов в классической теории упругости при действии сосредоточенной силы на изотропное упругое полупространство [5].

В качестве примера рассмотрим регулярную гетерогенную систему со следующими характеристиками: $G = 0,01E$; $\nu = \nu_M = 0,25$; $h = s$; $E_M = 2,5G$. Некоторые результаты вычислений безразмерных напряжений в жестких $\bar{\sigma}_r^{(k)}$ и в мягких слоях $\bar{\tau}_{rz}^{[k]}$ приведены на рис. 2, 3.

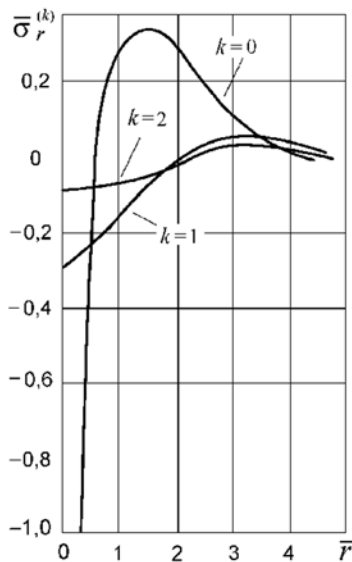


Рис. 2. Распределение $\bar{\sigma}_r^{(k)}$

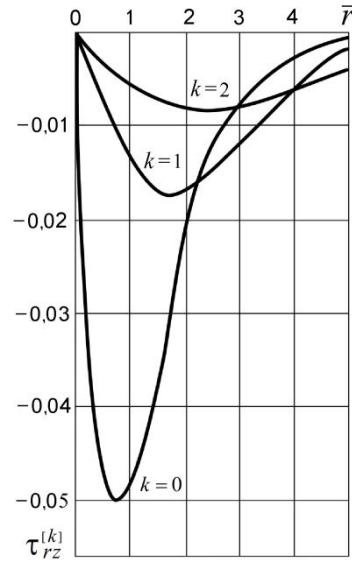


Рис. 3. Распределение $\bar{\tau}_{rz}^{[k]}$

Цифры у кривых указывают номер слоя, для которого выполнен расчет безразмерных напряжений: $\bar{\sigma}_r^{(k)} = \sigma_r^{(k)} / \sigma_0$; $\bar{\tau}_{rz}^{[k]} = \tau_{rz}^{[k]} / \sigma_0$.

Представленные численные результаты показывают распределение соответствующих напряжений по радиусу $\bar{r}$ и номеру слоя k . Напряжения $\sigma_r^{(k)}$ и $\sigma_{\theta}^{(k)}$ в нулевом слое имеют особенность в точке приложения силы, что является следствием идеализации расчетной схемы относительно представления внешнего воздействия в виде сосредоточенной силы. В реальных конструкциях внешняя нагрузка распределена по контактной площадке небольших размеров, имеющей площадь F [3]. Для сохранения осевой симметрии задачи можно считать, что сила P

равномерно распределена по круговой площадке, имеющей радиус $R = \sqrt{F / \pi}$, что в принятых обозначениях соответствует безразмерному радиусу $\bar{R} = 2\sqrt{F / \pi} / (h + s)$. При $\bar{r} \geq \bar{R}$ значения этих напряжений практически совпадают с расчетными напряжениями, которые убывают при удалении от точки приложения силы.

Представленные результаты показывают, что при удалении от точки приложения силы по оси z (увеличение номера слоя) распределение напряжений по радиусу $\bar{r}$ становится более равномерным, а их величина существенно уменьшается. При этом особенности в слоях с номерами $k \geq 1$ отсутствуют. Аналогичные выводы можно сделать и относительно напряжений $\sigma_z^{[k]}$ и $\tau_{rz}^{[k]}$, возникающих в трансверсально мягких слоях.

Анализ НДС по слоям позволяет установить длину «краевого» эффекта, который определяет расстояние от точки приложения силы до точки, на которой напряжения, возникающие в слоях, с погрешностью не более 5 % можно считать пренебрежимо малыми. Для рассматриваемой конструкции длина краевого эффекта L оценивается выражением $\bar{r} \geq 5$, т.е.

$$L = 5c = 2,5(h+s). \quad (8)$$

Из анализа НДС по слоям в направлении оси z следует, что в слоях с номером $k > 2$ напряжения также можно считать пренебрежимо малыми. Для данной конструкции НДС следует рассматривать в шести верхних слоях (три жестких и три мягких).

Предложенная модель позволяет рассмотреть частные случаи:

– если трансверсальная жесткость «мягких» слоев велика, т.е. их обжатием можно пренебречь, то в уравнениях следует положить $E_z \rightarrow \infty$. При этом вертикальные перемещения всех жестких слоев будут одинаковыми $w = w_k$, а напряжения $\sigma_z^{[k]} = 0$;

– если между соседними слоями отсутствует жесткая связь, т.е. имеет место проскальзывание, то следует положить $G = 0$ и, следовательно, $\tau_{rz}^{[k]} \equiv 0$.

Если слоистая система не является регулярной, то система разрешающих уравнений усложняется и не допускает аналитического решения при произвольном числе слоев. В этом случае решение необходимо искать численными методами. Тем не менее, проведенный анализ НДС для регулярной системы дает реальное представление о распределении полей напряжений и в нерегулярных многослойных системах.

Список литературы

1. Кузьмин Э. Н. Обеспечение виброударопрочности оборудования и аппаратуры. Снежинск : Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2003. 320 с.
2. Литвинов А. Н., Данилов В. В. Повышение износостойкости трибосопряжений при использовании металлоплакирующей смазочной композиции // Современные проблемы машиностроения : тр. IV Междунар. науч.-практ. конф. Томск : Изд-во ТПУ, 2011. С. 89–91.
3. Литвинов А. Н. Прикладные вопросы механики контактирующих тел : учеб. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2012. 166 с.
4. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М. : Машиностроение, 1980. 374 с.
5. Лурье А. И. Теория упругости. М. : Наука, 1970. 940 с.

Алгоритм оптимального расположения многослойного вибродемпфирующего покрытия на поверхности тонкостенной конструкции

**Александр Николаевич Литвинов¹,
Дмитрий Владимирович Артамонов²**

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹allitvinov48@mail.ru, ²dmitrartamonov@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается вибродемпфирование тонкостенных конструкций многослойными покрытиями. Предложен алгоритм выбора оптимальных зон расположения покрытия на поверхности конструкции. Приведен пример оптимизации расположения покрытия на поверхности платы электронного блока. Даны рекомендации по оптимальному расположению многослойного покрытия на поверхности конструкции в виде оболочек и панелей.

Ключевые слова: тонкостенная конструкция, покрытие, вибродемпфирование, оптимальное расположение

Optimal location algorithm multilayer vibration damping coating on the surface of a thin-walled structure

Alexander N. Litvinov¹, Dmitry V. Artamonov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia
¹allitvinov48@mail.ru, ²dmitrartamonov@yandex.ru

Abstract. Vibration damping of thin-walled structures with multilayer coatings is considered. An algorithm is proposed for choosing the optimal zones of the coating location on the surface of the structure. An example of optimizing the location of the coating on the surface of the electronic block board is given. Recommendations are given on the optimal location of the multilayer coating on the surface of the structure in the form of shells and panels.

Keywords: thin-walled structure, coating, vibration damping, optimal location

Многослойные вибродемпфирующие покрытия широко применяются для защиты изделий различного назначения от внешних динамических эксплуатационных нагрузок в широком частотном диапазоне [1]. Наиболее эффективными являются многослойные покрытия с чередующимися мягкими и жесткими слоями. Такие покрытия располагают на тонкостенных элементах конструкций, которые представляют собой пластины (платы), панели и оболочки различной конфигурации (обшивки летательных аппаратов, панели платы электронных блоков радиоэлектронных систем различного назначения) [2].

Эффективность демпфирования определяется относительным рассеянием энергии

$$\psi = \Delta W / W, \quad (1)$$

где ΔW – величина энергии, рассеиваемой в конструкции за период колебаний; W – среднее за период значение полной механической энергии демпфируемой конструкции.

Реальные конструкции имеют, как правило, достаточно сложную геометрическую форму, а покрытие должно быть достаточно тонким, чтобы существенно не увеличивать вес демпфируемой конструкции. Кроме того из конструктивных и технологических соображений покрытие может наноситься не на всю поверхность несущей конструкции, а на ее отдельные части, что существенно усложняет динамический расчет конструкции с покрытием, которая представляет собой достаточно сложную многослойную гетерогенную структуру. В этом случае для оценки эффективности демпфирования рекомендуется применять приближенный способ [3], в соответствии с которым относительное рассеяние энергии определяем по формуле

$$\psi = \psi_k + \psi_{\Pi}, \quad (2)$$

где ψ_k – относительное рассеяние в несущей конструкции без покрытия; $\psi_{\Pi} = \Delta W_{\Pi} / W$ – относительное рассеяние в покрытии, которое определяется с учетом свойств его мягких слоев [3]. Здесь ΔW_{Π} – величина рассеиваемой энергии в покрытии за период колебаний.

В общем случае рассмотрим несущую тонкостенную конструкцию в виде панели, на некоторых i -х участках которой расположено вибродемпфирующее слоистое покрытие (рис. 1).

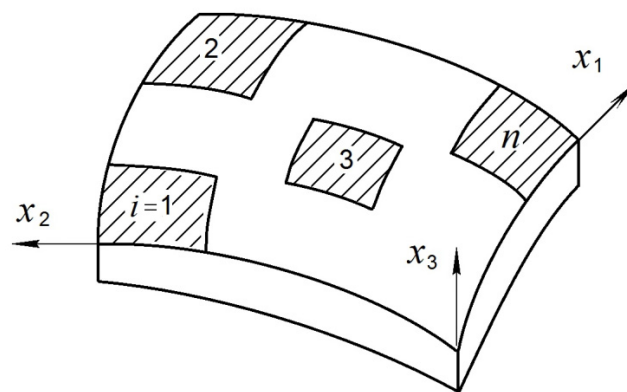


Рис. 1. Элемент конструкции с покрытием

Здесь $i = 1, 2, \dots, n$ – номер участка, n – число участков. Зоны расположения покрытия заштрихованы.

В этом случае относительное рассеяние энергии в покрытии вычисляется как

$$\psi_{\Pi} = \sum_{i=1}^N (\Delta W_{\Pi})_i / W. \quad (3)$$

Здесь $(\Delta W_{\Pi})_i$ – рассеяние энергии колебаний в покрытии, расположенным в i -й зоне на поверхности несущей конструкции, которое вычисляется по методике, приведенной в [3] через перемещения поверхности несущей конструкции в этих зонах: $u_0(x_1, x_2)$; $v_0(x_1, x_2)$; $w_0(x_1, x_2)$ в направлении осей x_1, x_2, x_3 соответственно (см. рис. 1).

Поле перемещения поверхности несущей конструкции u_0^i, v_0^i, w_0^i в i -х зонах расположения покрытия определяется аналитически или численно для несущей конструкции без учета покрытия в соответствии с алгоритмом, изложенным в [2].

Движение покрытия в этом случае рассматриваем как вынужденное квазистатическое деформирование, вызванное заданным движением поверхности несущей конструкции, на которой расположено покрытие.

Анализ выражений (2), (3) показывает, что наиболее эффективным следует считать покрытие, при котором параметр ψ_{Π} достигает максимального значения, которое зависит от зон его расположения на поверхности конструкции. Очевидно, что это условие будет выполняться, если покрытие располагать в зонах, где деформации несущей конструкции будут максимальными и, следовательно, деформации слоев покрытий, определяющие диссипацию энергии, также будут максимальными. Поэтому перед расчетом слоистого покрытия следует выполнить динамический расчет несущей конструкции и определить зоны оптимального размещения вибродемпфирующего покрытия с учетом конструкторско-технологических особенностей и доступности его размещения на реальной конструкции.

Покажем это на примере определения оптимальных зон расположения вибродемпфирующего покрытия прямоугольной платы электронного блока.

Для определения собственных частот платы, на которых имеют место резонансы, применяем метод конечного элемента, реализованного в программном комплексе ANSYS. Рассмотрим преимущественно изгибные формы колебаний. Плата установлена в электронном блоке, который при эксплуатации подвергается воздействию вибрации с частотой до 1200 Гц. Плата крепится в пяти точках, имеет размер в плане (120×80) мм², толщину $h = 1,5$ мм. Материал платы – стеклотекстолит модулем упругости $E = 3 \cdot 10^4$ МПа, коэффициентом Пуассона $\mu = 0,22$ и плотностью $\rho = 2000$ кг/м³.

Расчет собственных частот показал, что в эксплуатационном частотном диапазоне плата имеет три частоты f_1, f_2, f_3 , на которых имеют место резонансы. На рис. 2 показаны эти частоты и формы колебаний, соответствующие им.

Зоны оптимального расположения покрытия на рис. 2 показаны темным фоном. В этих зонах относительная деформация платы и покрытия является максимальной, что приводит к максимальному рассеиванию энергии и демпфированию колебаний платы. Расположение этих зон существенно зависит от демпфируемой формы колебаний. Если на плате имеются навесные ЭРИ, то динамический расчет частот и форм колебаний платы необходимо вычислять с учетом реального расположения ЭРИ на поверхности, их размеров и способа крепления к плате (клеевой или паяный шов) в соответствии с результатами исследований, приведенных в работе [4].

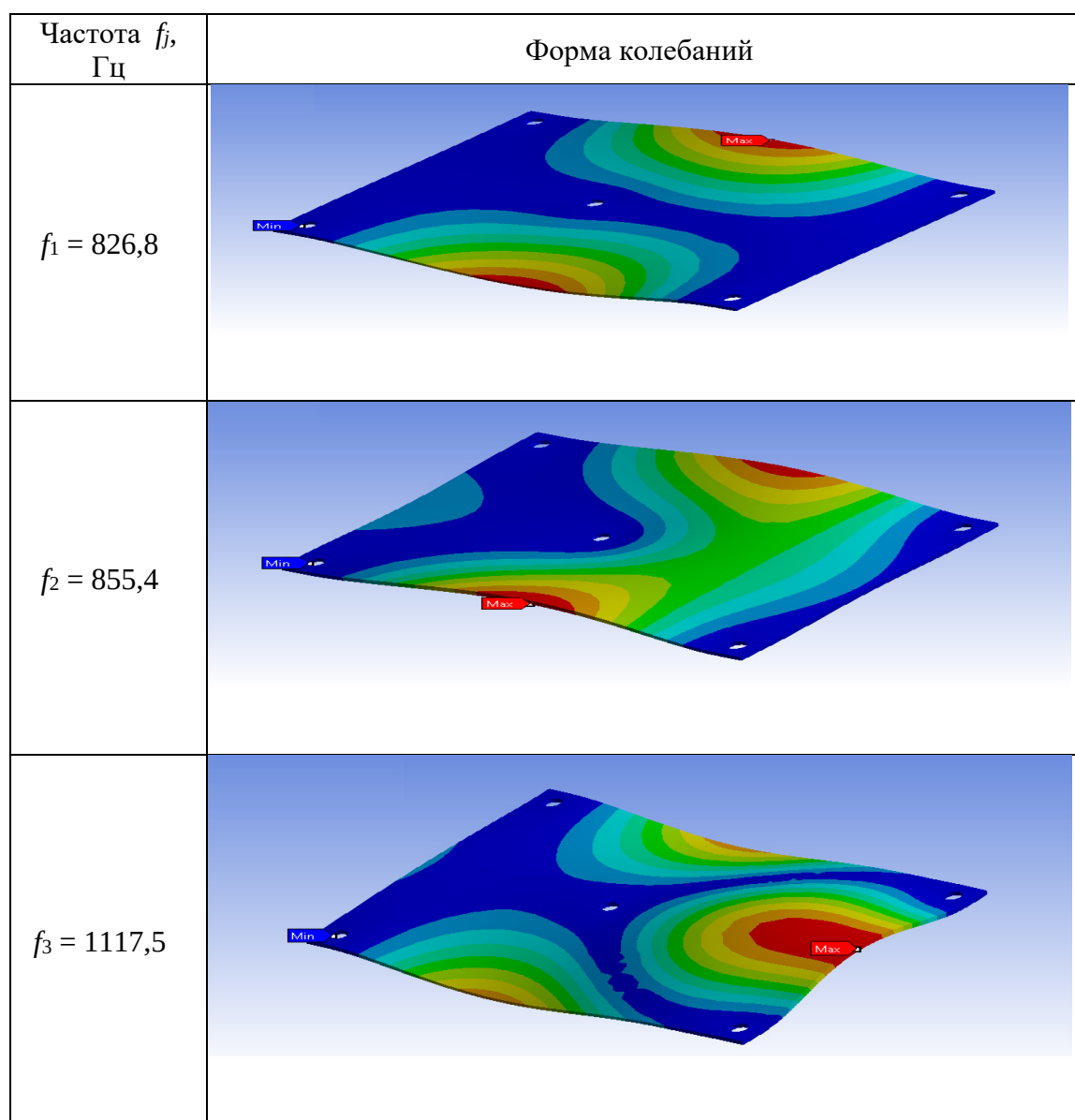


Рис. 2. Формы колебаний платы

Проведенные численные исследования для несущих тонкостенных конструкций в виде оболочек и панелей различной конфигурации

показали, что оптимальным является расположение вибродемпфирующего покрытия на внутренней поверхности конструкции, так как в этом случае кривизна внутренней поверхности больше чем внешней, что приводит к увеличению деформации покрытия и, как следствие, к повышению его демпфирующей способности.

Представленный подход позволяет на этапе проектирования научно обоснованно выбирать зоны оптимального расположения вибродемпфирующего покрытия на поверхности тонкостенной конструкции, обеспечивающего максимальное вибродемпфирование конструкции в заданном частотном диапазоне.

Анализ напряженно-деформированного состояния слоев покрытия и определение адгезионной прочности в зоне его контакта с несущей поверхностью проводится в соответствии с алгоритмом, изложенным в [2].

Список литературы

1. Литвинов А. Н. Эффективность демпфирования оболочек при помощи многослойных покрытий // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2005. № 5. С. 178–191.
2. Литвинов А. Н. Алгоритм для анализа адгезионной прочности слоистого вибродемпфирующего покрытия при динамическом нагружении // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XIII Междунар. науч.-техн. конф. ; под ред. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. С. 125–130.
3. Литвинов А. Н. Метод расчета эффективности применения гетерогенных вибродемпфирующих покрытий для несущих конструкций сложной формы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2009. № 4. С. 160–171.
4. Хади О. Ш., Литвинов А. Н. Анализ моделей для исследования динамических характеристик плат РЭС // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2015. № 1 (13). С. 184–188.

Исследование химически реагирующих потоков средствами компьютерной математики

**Кирилл Игоревич Малов¹,
Елизавета Евгеньевна Пескова²,
Ольга Сергеевна Язовцева³**

^{1,2,3} Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева, Саранск, Россия
¹malovkapeji2000@gmail.com, ²e.e.peskova@math.mrsu.ru, ³yaos@math.mrsu.ru

Аннотация. Приведен алгоритм решения задачи газовой динамики химически реагирующих смесей. Математическая модель описана системой уравнений на основе уравнений Навье – Стокса в приближении малых чисел Маха с учетом теплопроводности, диффузии и химических реакций в одномерной постановке. Высокая жесткость системы не позволяет решать ее средствами компьютерной математики. Приведены достаточные допущения, упрощающие модель, и эквивалентные преобразования, сводящие систему к недивергентному виду. Новая система может быть решена стандартными средствами математического пакета. Проведено сравнение с ранее известным решением системы, сделан вывод об адекватности алгоритма, приведены перспективы его применения.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, газовая динамика, численные методы, пиролиз этана

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00202, <https://rscf.ru/project/23-21-00202/>

Investigation of chemically reacting flows by computer mathematics

**Kirill I. Malov¹, Elizaveta E. Peskova²,
Olga S. Yazovtseva³**

^{1,2,3}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia
¹malovkapeji2000@gmail.com, ²e.e.peskova@math.mrsu.ru,
³yaos@math.mrsu.ru

Abstract. The article presents an algorithm for solving the gas dynamics problem of chemically reacting mixtures. The mathematical model is described by a system of low-Mach-number approximations of Navier – Stokes equations for multicomponent reacting mixtures, supplemented by the medium's thermal conductivity, diffusion and chemical reactions in a one-dimensional formulation. The high stiffness of the system does not allow solving it directly by computer mathematics. The article presents sufficient assumptions that simplify the model and equivalent transformations

that reduce the system to a non-divergent form. The new system can be solved by standard means of the mathematical package. A comparison with a previously known solution of the system is made, a conclusion is made about the adequacy of the algorithm, and prospects for its application are given.

Keywords: computer simulation, gas dynamics, numerical methods, ethane pyrolysis

Acknowledgments: the scientific was carried out with the support of the grant of the Russian Science Foundation № 23-21-00202, <https://rscf.ru/project/23-21-00202/>

В настоящее время актуальным вопросом остается разработка эффективных вычислительных алгоритмов для задач, включающих в себя разномасштабные процессы. Примером таких задач может служить моделирование течения многокомпонентных химически активных газовых смесей. Большое количество работ посвящено исследованию сверхзвуковых газовых потоков [1]. Однако на практике также востребованы модели дозвукового течения [2, 3]. Дозвуковые течения актуальны при моделировании процессов в химических реакторах [4], в гемодинамике [5], задач гидродинамики в водоемах [6].

Как известно, основные проблемы, возникающие при численном моделировании задач химии с учетом многофакторных воздействий, связаны с наличием разномасштабных процессов, протекающих в реакторе. Высокая жесткость систем дифференциальных уравнений, описывающих такие модели, не позволяет напрямую решать задачи с использованием готовых математических пакетов. Однако, для верификации новых разрабатываемых алгоритмов использование математических пакетов актуально, поскольку большинство задач не имеет аналитического решения, а средства компьютерной алгебры позволяют численно решать некоторые задачи в упрощенной постановке.

В настоящей работе приведена методика решения задач газовой динамики химически реагирующих потоков в системе компьютерной математики Maple с учетом некоторых допущений. В качестве примера применения разработанной методики приведено исследование математической модели пиролиза этана.

Математическая модель пиролиза этана описана уравнениями Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха с учетом теплопроводности среды, диффузии и химических реакций:

$$\frac{\partial \rho Y_m}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho Y_m \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{J}_m + R_m, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) - \nabla \pi + \nabla \cdot \vec{\tau}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho h \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{q}, \quad (3)$$

Здесь $m=1, \dots, M$ M количество компонент в газовой смеси, ρ – плотность смеси, Y_m – массовая доля m -ой компоненты смеси, $\vec{v}$ – вектор скорости, h – энтальпия смеси, $\vec{J}_m$ – вектор диффузионного потока, R_m – скорость образования или расхода m -й компоненты смеси, $\pi = p - p_0$ – динамическая составляющая давления, p_0 – термодинамическое давление (пространственно постоянное в области), p – давление смеси газов, $\bar{\tau}$ – тензор вязких напряжений, $\vec{q}$ – вектор потока тепла.

Для замыкания система дополнена уравнением состояния газовой смеси:

$$p = \rho R T \sum_m \frac{Y_m}{M_{wm}}, \quad (4)$$

где T – температура, M_{wm} молекулярная масса m -ой компоненты смеси, R – универсальная газовая постоянная.

Для реализации был выбран пакет компьютерной математики Maple. Особенности пакета требуют записи системы в недивергентной форме, а ограниченность средств готовых компьютерных пакетов вынуждает свести задачу к более простой.

В силу высокой жесткости системы задача решалась со следующими допущениями:

1. В качестве химической реакции была выбрана брутто-реакция пиролиза этана без учета радикальных механизмов. Это позволяет снизить жесткость системы и сократить количество уравнений переноса компонент смеси.

2. Коэффициенты теплоемкости и теплопроводности для каждого вещества смеси приняты постоянными – выбраны некоторые усредненные значения, отвечающие интервалу температур течения реакции. Это сводит некоторые нелинейные члены модели к линейным.

3. Коэффициенты диффузии и вязкости рассчитаны как постоянный эффективный коэффициент для смеси газов, что значительно снижает количество вычислений, а также позволяет избавиться от существенной нелинейности в диффузионных уравнениях и уравнениях переноса.

4. Уравнение для учета изменения энергии записано в форме уравнения теплопроводности, что снизило жесткость задачи.

Таким образом, исследуемая модель примет вид:

$$\frac{\partial \rho Y_i}{\partial t} = - \frac{\partial \rho Y_i u}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho Y_i}{\partial x^2} + R_i, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u c \frac{\partial T}{\partial x} + \sum_{j=1}^2 Q_j W_j, \quad (7)$$

$$p = \rho \frac{RT}{M}, \sum_{i=1}^4 Y_i = 1, \sum_{i=1}^4 R_i = 0. \quad (8)$$

Здесь приняты следующие обозначения. x – координата, отвечающая длине реактора; t – время; ρ – плотность смеси; u – скорость газового потока; Y_i – концентрация компонент реакционной смеси (1 – этан, 2 – этилен, 3 – водород, 4 – метан); D – эффективный коэффициент диффузии реакционной смеси; R_i – источниковый член, отвечающий химическим реакциям, схема реакции и параметры приведены в [6]; μ – вязкость реакционной смеси; R – универсальная газовая постоянная; M_g – молекулярная масса газовой смеси; T – температура; λ – усредненный коэффициент теплопроводности реакционной смеси; c – усредненный коэффициент теплоемкости реакционной смеси Q_j – тепловой эффект реакции.

Уравнение (5) – система из четырех уравнений, из суммирования которых с учетом (8) следует выражение для плотности реакционной смеси:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (9)$$

Раскрывая произведение производных в уравнении (6), получим:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} = -2u\rho \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (10)$$

из которого следует выражение для производной скорости по времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - 2u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (11)$$

Подстановкой равенства (9) в уравнение (11), запишем следующее уравнение для скорости потока:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D \frac{u}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (12)$$

при этом

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{R}{M} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \quad (13)$$

Раскрыв производные в правой и левой частях уравнений для концентраций (5), получим выражение:

$$\rho \frac{\partial Y_i}{\partial t} + Y_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho Y_i \frac{\partial u}{\partial x} - \rho u \frac{\partial Y_i}{\partial x} - u Y_i \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho Y_i}{\partial x^2} + R_i, \quad (14)$$

из которого выразим производную концентрации по времени с учетом уравнения неразрывности (9):

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} = -u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + D \frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2} + \frac{R_i}{\rho} + 2 \frac{D}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial Y_i}{\partial x}. \quad (15)$$

Эквивалентными преобразованиями система (5)–(8) приведена к следующему виду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} = -u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + D \frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2} + \frac{R_i}{\rho} + 2 \frac{D}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial Y_i}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D \frac{u}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{R}{M} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{c} \sum_{j=1}^2 Q_j W_j. \quad (19)$$

Начально-краевые условия для задачи примут вид:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, T(0, x) = 750, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \rho(0, x) = 0.48, \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, u(0, x) = 0.1, \quad (22)$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial Y_i}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, i = \overline{1,4}, Y_1(0, x) = 1, Y_m(0, x) = 0, m = \overline{2,4}. \quad (23)$$

Для численного решения задачи (16)–(23) были выбраны следующие значения параметров.

$$\lambda = 0.05; c = 1768; \mu = 2 \cdot 10^{-5}; Q_1 = 1.362 \cdot 10^5; Q_2 = -0.704 \cdot 10^5; \\ D = 10^{-5}; M = 0.03; L = 0.001.$$

Для решения начально-краевой задачи (16)–(23) использована процедура `pdsolve`, предназначенная для решения систем уравнений в частных производных, с указанием типа решения `numeric` и искусственно заданными шагами интегрирования `spacestep = 0.00001`, `timestep = 0.01`. Процедура `pdsolve` используется неявный метод Кранка-Николсона, основанный на интегро-интерполяционном методе с весовыми коэффициентами. Отрезок интегрирования по времени $[0, 0.001]$ [7]. Для визуализации результатов была применена процедура `plot` пакета `PDEtools`. Ниже на рис. 1 представлены графики решений в момент времени 1 с.

На вход подается этан, нагретый до 800 К, скорость 0.1 м/с, плотность газа рассчитана, исходя из значения давления в формуле (8). Пиролиз этана является эндотермическим процессом, что соответствует рис. 1,а, отражающему падение температуры. При 800 К реакция идет достаточно активно, расход этана представлен на рис. 1б. Образование продуктов реакции (рис. 1,в) отвечает закону сохранения массы, что свидетельствует об адекватности примененного численного метода.

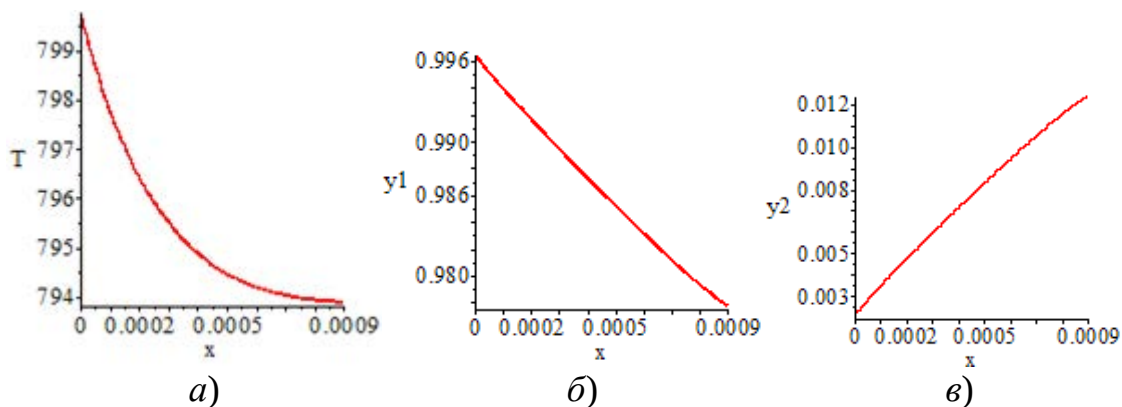


Рис. 1. Графики характеристик по длине реактора:
 а – температура, б – концентрация этана, в – концентрация метана

Таким образом, эквивалентными преобразованиями система сведена к недивергентной записи, которая при наличии некоторых допущений позволяет решить задачу.

Для верификации результата было проведено сравнение с результатами работы ранее разработанной программы, которая прошла верификацию на экспериментальных и аналитических данных [8].

Различия между результатами, представленные на рис. 2, лежат в пределах точности метода, что дает основания считать расчет Maple адекватным.

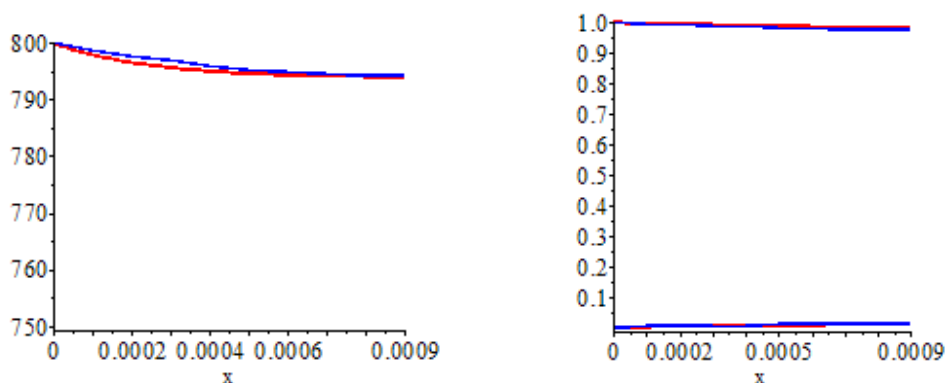


Рис. 2. Сравнение расчетов характеристик

Разработанная методика правомочна в части тестирования новых численных алгоритмов для задач газовой динамики, но для решения

практических задач результат является неудовлетворительным, поскольку стандартные средства компьютерной математики Maple позволяют интегрировать при длине реактора 0.001 м, что при наличии существенных ограничений дает результат, далекий от реального процесса. Увеличение длины реактора при сохранении пространственных и временных шагов приводит к расхождению численного метода. Измельчение шага интегрирования по пространству и времени влечет значительное увеличение количества операций и переполнение оперативной памяти.

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет проводить тестирование новых численных алгоритмов для более сложных задач, в том числе и с учетом радикального механизма и многокомпонентной диффузии, при наличии некоторых ограничений, оценка влияния которых может быть проведена методами качественного и количественного анализа.

Список литературы

1. Борисов В. Е., Критский Б. В., Рыков Ю. Г. Программный модуль MCFL-Chem для расчета высокоскоростных течений смеси реагирующих газов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2022. № 21. 40 с.
2. Day M. S., Bell J. B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // Combustion Theory and Modelling. 2000. Vol. 4., iss. 4. P. 535–556.
3. Борисов В. Е., Якуш С. Е. Применение адаптивных иерархических сеток для расчета течений реагирующих газов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2015. Т. 16, № 2.
4. Yazovtseva O. S., Gubaydullin I. M., Peskova E. E., Sukharev L. A., Zagoruiko A. N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. Vol. 11. P. 669. doi: 10.3390/math11030669
5. Василевский Ю. В., Симаков С. С., Гамилов Т. М. [и др.]. Персонализация математических моделей в кардиологии: трудности и перспективы // Компьютерные исследования и моделирование. 2022. Т. 14, № 4. С. 911–930.
6. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Никитина А. В., Атаян А. М., Литвинов В. Н. Метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях // Математическое моделирование. 2023. Т. 35, № 3. С. 35–58.
7. Губайдуллин И. М., Пескова Е. Е., Язовцева О. С. Математическая модель динамики многокомпонентного газа на примере брутто-реакции пиролиза этана // Огарев-online. 2016. № 20. URL: <https://journal.mrsu.ru/arts/matematiceskaya-model-dinamiki-mnogokomponentnogo-gaza-na-primere-brutto-reakcii-piroliza-etana>
8. Gubaydullin I. M., Zhalnin R. V., Masyagin V. F., Peskova E. E., Tishkin V. F. Simulation of propane pyrolysis in a flow-through chemical reactor under constant external heating // Mathematical models and computer simulations. 2021. Vol. 13, № 3. P. 437–444.

Исследование влияния прошлых воспитательных циклов на текущее воспитание цифрового двойника

Наталья Владимировна Ощепкова

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Россия
nvo@psu.ru

Аннотация. Рассматриваются математические модели воспитания цифровых двойников – психологических аналогов человека с помощью медиапроектов. Приводится алгоритм решения оптимизационной задачи нахождения минимального невливания прошлого воспитания робота на текущее воспитание. В качестве примера реализации предлагаемых моделей приводится план выпуска в эфир передач медиапроекта при ограничениях финансовых затрат на их подготовку и трансляцию.

Ключевые слова: математические модели, воспитание роботов, память роботов

Research of the influence of the past educational cycles on the current education of the digital twin

Natalia V. Oshchepkova

Perm State University, Perm, Russia
nvo@psu.ru

Abstract. The paper is researching mathematical models for the education of digital twins that are psychological analogues of a person. Here is given an algorithm for solving the optimized problem of finding the minimum non-influence of the past education of the robot on the current education. As an example of the implementation of the proposed models here is given a plan for broadcast release of a media project with limited financial costs for their preparation and broadcast.

Keywords: mathematical models, education of robots, memory of robots

В настоящее время в Пермском государственном национальном исследовательском университете активно ведутся работы по созданию роботов – психологических цифровых двойников человека [1]. В ПГНИУ защищены по этой теме несколько диссертаций на соискание ученых степеней кандидатов физико-математических наук [2, 3].

Рассмотрим математическую модель воспитания робота – цифрового двойника человека с помощью медиа проектов. Пусть в процессе

воспитания происходит последовательная смена одного полного воспитательного цикла другим полным воспитательным циклом [4].

Пусть n – количество полных воспитательных циклов трансляции передачи, m_n – количество непрерывных трансляций передачи в воспитательном цикле с номером n , k_n – количество пропущенных трансляций в этом же воспитательном цикле, θ_n – коэффициент памяти робота ($\theta_n \in (0; 1 - \delta]$, $0 < \delta < 1$, $\delta = const$) в полном воспитательном цикле с порядковым номером n , q_n – элементарное воспитание (эмоциональное воздействие) у робота, возникшее в результате ознакомления с передачей СМИ в полном воспитательном цикле с порядковым номером n .

Согласно работе [5], воспитание $W_{m_n, k_{n-1}}$, полученное роботом в результате непрерывных трансляций m_n в полном воспитательном цикле n , можно вычислить по формуле:

$$W_{m_n, k_{n-1}} = q_n \frac{1 - \theta_n^{m_n}}{1 - \theta_n} + \theta_n^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}}, \quad (1)$$

где

$$F_{m_0, n_0} = 0, \quad F_{m_n, k_n} = \theta_n^{k_n} \left(q_n \frac{1 - \theta_n^{m_n}}{1 - \theta_n} + \theta_n^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}} \right).$$

Рассмотрим параметр μ_n , характеризующий невлияние прошедших воспитаний робота на текущее воспитание, соответствующее полному воспитательному циклу с порядковым номером n :

$$\mu_n = \frac{q_n \frac{1 - \theta_n^{m_n}}{1 - \theta_n}}{\theta_n^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}}}. \quad (2)$$

Очевидно, что чем больше значение μ_n , тем меньше влияние прошлых воспитаний на текущее воспитание робота.

На основе соотношения (2) легко вычислить значение m_n , определяющее количество непрерывных трансляций передач и обеспечивающие заданное влияние μ_n на текущее воспитание робота от прошлых воспитаний:

$$m_n = \log_{\theta_n} \left[\frac{q_n}{\mu_n (1 - \theta_n) F_{m_{n-1}, k_{n-1}} + q_n} \right]. \quad (3)$$

В силу справедливости неравенства $m_n \geq 1$ согласно формуле (3) получим соотношение:

$$\mu_n \leq \frac{q_n}{\theta_n F_{m_{n-1}, k_{n-1}}} . \quad (4)$$

Согласно равенству (2) и формуле (4) можно записать соотношение, определяющее диапазон изменения величины μ_n :

$$\mu_n \in \left[0; \frac{q_n}{\theta_n F_{m_{n-1}, k_{n-1}}} \right].$$

Пусть справедливы соотношения

$$m_n = m = \text{const}, \theta_n = \theta = \text{const}, n = \overline{1, \infty}, \quad (5)$$

тогда формула (2) переписывается в виде:

$$\mu_n = \frac{\frac{1 - \theta^m}{1 - \theta}}{\theta^m \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta^{m+k}}} = \frac{1 - \theta^{m+k}}{\theta^m \left(1 - (\theta^{m+k})^{n-1} \right)}. \quad (6)$$

Сформулируем следующую задачу: «Найти такие значения величин m , k и n , обеспечивающие наименьшее значение невлиния прошлых воспитаний на конечное воспитаний при ограничениях на финансовые затраты на воспитание».

Пусть c_i – стоимость производства единицы времени одной передачи в эфире в полном воспитательном цикле i , $i = \overline{1, n}$, A – выделяемые средства на весь медиа-проект, t_i – продолжительность одной передачи в полном воспитательном цикле i , T – общая длительность всего проекта с учетом перерывов в трансляциях.

Эта задача математически формулируется следующим образом:

найти

$$\min_{m, n, k} \mu_n = \min_{m, n, k} \frac{1 - \theta^{m+k}}{\theta^m \left(1 - (\theta^{m+k})^{n-1} \right)} \quad (7)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n c_i t_i m = A, \quad \sum_{i=1}^n t_i (m + k) = T. \quad (8)$$

Для решения задачи (7) – (8) с учетом того, что задано наибольшее возможное количество полных воспитательных циклов N , применим алгоритм, основанный на методе перебора параметра n :

1. Задаем входные параметры модели: c, t, A, T, θ, N
2. $n := 1$.
3. Вычисляем значения m и k по формулам:

$$m = \text{ant}\left(\frac{A}{cnt}\right), k = \text{ant}\left(\frac{cT - A}{cnt}\right).$$

4. Вычисляем $S_r = \frac{1}{\theta^m} - \theta^k$.
5. $m_r := m, k_r := k, n_r := n$.
6. $n := n + 1$.
7. Если $n \leq N$, то идти к 8, иначе идти к 12.
8. Вычисляем значения m и k по формулам пункта 3.
9. Вычисляем $S = \frac{1}{\theta^m} - \theta^k$.
10. Если $S < S_r$ и $k \geq 1$ и $m \geq 1$, то $S_r := S, m_r := m, k_r := k, n_r := n$.
11. Идти к 6.
12. $S_r = \frac{1}{\theta^{m_r}} - \theta^{k_r}$.
13. Конец.

В результате работы алгоритма значение S_r будет равно минимальной величине невлиния прошедшего воспитания на итоговое воспитание полного воспитательного цикла, а значения m_r, k_r, n_r , равны количеству непрерывных трансляций передач, количеству пропусков передач и количеству полных воспитательных циклов соответственно, обеспечивающих полученное значение S_r .

Для компьютерной реализации алгоритма была разработана и запатентована программа на языке программирования Delphi-6. Выбор языка программирования обусловлен удобством разработки интерфейса программы, обеспечивающем успешную работу с программой даже неподготовленному пользователю.

На рис. 1 приведена главная форма программы.

Результаты численного эксперимента, демонстрирующие пример работы алгоритма, приведены на главной форме программы также на рисунке 1.

Согласно результатам численных экспериментов можно сделать дополнительный вывод о том, что алгоритм позволяет вычислять оптимальное время функционирования всей программы передач. В рассматриваемом примере он равен 267 единицы времени.

Вычисление наименьшего невливания предыдущего воспитания на последующие воспит...

Стоимость единицы времени трансляции передачи 1000

Выделенные денежные средства на программу передач 100000

Продолжительность всей программы 365

Продолжительность одной передачи 1

Коэффициент памяти 0,8

Максимально допустимое количество полных воспитательных циклов 200

Для решения задачи нажмите эту кнопку

Наименьшее невливание 0,61

Количество непрерывных трансляций передач 1

Количество пропусков трансляций передач 2

Количество полных воспитательных циклов 89

Рис. 1. Главная форма программы

На основе проведенного однопараметрического анализа можно сделать вывод, что с увеличением коэффициентов памяти робота невливание предыдущего воспитания на последующие воспитания уменьшается, то есть, предыдущие воспитания все больше и больше влияют на последующие воспитания.

Список литературы

1. Пенский О. Г., Шарапов Ю. А., Ощепкова Н. В. Математические модели роботов с неабсолютной памятью и приложения моделей : монография. Пермь : Перм. гос. нац. исслед. ун-т, 2018. 309 с.
2. Черников К. В. Математические модели роботов с неабсолютной памятью : дис. ... канд. физ.-матем. наук. Пермь : ПНИПУ, 2014. 151 с.
3. Шарапов Ю. А. Математические модели эмоциональных роботов, способных забывать информацию : дис. ... канд. физ.-матем. наук. Екатеринбург : УрФУ, 2019. 168 с.
4. Пенский О. Г., Ощепкова Н. В. Математические модели воспитания роботов с неабсолютной памятью с помощью средств массовой информации // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. № 3 (46). С. 65–71.
5. Ощепкова Н. В., Пенский О. Г. Математические модели интереса эмоциональных роботов к медиа проектам // Искусственный интеллект и принятие решений. 2022. № 1. С. 19–25.

Применение фрактальной размерности для анализа микроструктуры полимерного композита

Альбина Николаевна Перекусихина

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
Пенза, Россия
albinakruglova@yandex.ru

Аннотация. Проведен анализ микрофотографий структуры полимерного наномодифицированного композита, полученных методами оптической и сканирующей зондовой микроскопии, с помощью применения критерия, подобного фрактальной размерности. Данный критерий получен на основе двоичной декомпозиции яркостного поля.

Ключевые слова: фрактальная размерность, обработка изображений, полимерный наномодифицированный композит

Application of fractal dimension for analysis of polymer composite microstructure

Albina N. Perekusikhina

Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russia
albinakruglova@yandex.ru

Abstract. Microphotographs of the structure of a polymer nanomodified composite obtained by optical and scanning probe microscopy using a criterion similar to fractal dimension are analyzed. This criterion is obtained on the basis of binary decomposition of the brightness field.

Keywords: fractal dimension, image processing, polymer nanomodified composite

Исследование микроструктуры материалов с помощью различных методов микроскопии позволяет определить наличие или отсутствие в ней кластерных образований. Данные образования оказывают существенное влияние на эксплуатационные характеристики материала, а также на некоторые физико-механические свойства композитов. Рассмотрим такое исследование на примере полимерного наномодифицированного композита.

В материале наполнителем использован полиминеральный материал (PbO – 71 %, SiO₂ – 27 %, Na₂O – 0,7 %, K₂O – 1,3 %) с удельной поверхностью 200 м²/кг, матричный материал и отвердитель – диановый эпоксидный олигомер ЭД-20 и полиэтиленполиамин. Перед совмещением с вяжущим наполнитель обрабатывали раствором полиметилфенилсилоксана (ПМФС) в диметилкетоне и просушивали до полного

удаления растворителя. Концентрация и расход раствора выбирались исходя из заранее заданной (расчетной) средней толщины (до 7,5 нм) слоя ПМФС на частицах наполнителя.

Рассмотрим исследование микроструктуры данного композита методами оптической микроскопии и атомно-силовой (АСМ) или сканирующей зондовой микроскопии.

Исследование методом оптической микроскопии выполнено с использованием устройства регистрации, включающего объектив (с фокусным расстоянием 3 мм), окуляр (выполненный по схеме с вынесенным зрачком), осветитель и прибор с зарядовой связью (предназначен для фиксации получаемого изображения). В процессе исследований объёмная степень наполнения композиции составляла $v_f = 0,01$. Микрофотографии, полученные в проходящем свете, представлены на рис. 1.

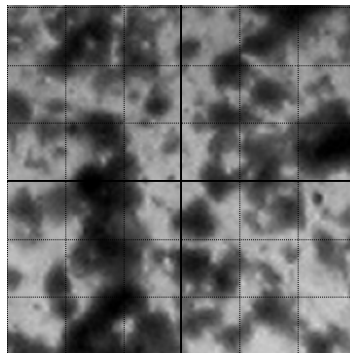


Рис. 1. Микрофотография наполненного связующего, увеличение 2000×

На этом изображении отчетливо просматриваются структуры, которые можно классифицировать как кластеры из частиц наполнителя.

Линейные методы контрастирования лишь ограниченно пригодны в качестве средства постобработки изображения микроструктуры. Предпочтительным является (поэлементное) нелинейное преобразование яркостного поля $I_{Out} = f(I_{In})$, где

$$f(t) = \begin{cases} 0, t \notin [0,1] \\ \exp(-8(t - I_m)^2) \end{cases} \quad (1)$$

– медианное значение интенсивности, полученное анализом гистограммы яркостного поля [1].

Для выполнения преобразования (1) использовано ПО, представляющее интерпретатор с проблемно-ориентированного языка. Результат преобразования приведён на рис. 2.

Визуальный анализ рис. 2 позволяет сделать заключение, что при объёмной степени наполнения $v_f = 0,01$ пространственное распределение частиц аппретированного наполнителя не является равномерным,

а структура наполненного связующего далека от однородной. Частицы наполнителя под влиянием поверхностных сил (представленных выше соответствующими слагаемыми потенциала парного взаимодействия) группируются в образования, которые можно классифицировать как кластеры.

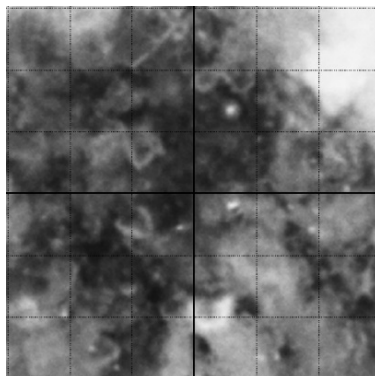


Рис. 2. Микрофотография наполненного связующего, увеличение 2400 $\times$

Метод оптической микроскопии имеет ряд недостатков, например, таких как отсутствие возможности анализа микрорельефа поверхности исследуемого материала. Этот минус устранен в методе сканирующей зондовой микроскопии, основанном на взаимодействии твердотельного зонда с поверхностью и приближенным к объекту исследования на расстояние 10...100 нм. Детектируется локальная сила, возникающая при Ван-Дер-Ваальсовском взаимодействии зонда и объекта исследования. Данное исследование проводилось на учебно-исследовательском сканирующем зондовом микроскопе NanoEducator. С использованием выбранных алгоритмов постобработки (вычитание линейных составляющих, выравнивание гистограммы яркостного поля) получено атомно-силовое изображение наполненного эпоксидного связующего. Изображение для $\nu_f = 0,01$ представлено на рис. 3, на котором просматриваются линейные структуры, которые с увеличением объемной степени наполнения объединяются в непрерывный каркас.

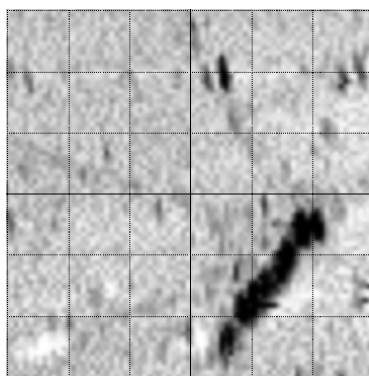


Рис. 3. Микроструктура ЭС, увеличение 2000 $\times$

Прогресс вычислительной техники сопровождается развитием средств и методов *цифровой обработки сигналов и изображений*. Каждый из этих методов можно представить в виде трех последовательных этапов:

- дискретизация и квантование непрерывного яркостного поля исходного изображения;

- использование вычислительно-логических алгоритмов для *преобразования полученного дискретного изображения* (на этом этапе возможна визуальная оценка промежуточных результатов или получение графических образов, на основании анализа которых суждения о качестве могут быть сделаны с высокой достоверностью);

- нахождение *скалярных критериев*, характеризующих исходное изображение.

Обработка исходного непрерывного цветояркостного поля средствами цифровой ЭВМ становится возможной после дискретизации (построения матрицы, каждый элемент которой характеризует прямоугольную подобласть исходного изображения) и квантования (перехода от непрерывно изменяющихся цветояркостных переменных к их дискретному представлению). На практике указанные операции выполняются одновременно при помощи какого-либо *приемного устройства*, характеристики которого определяют объем информации, доступной для последующей программной обработки. Для метода оптической микроскопии устройством дискретизации и квантования является прибор с зарядовой связью; для АСМ таким устройством является механическая система «образец-зонд», дополненная схемой измерения амплитуды колебаний зонда.

Задача количественного определения соответствия изображений в серии рассматривалась во многих работах, но не получила окончательного решения. Многие методики сравнения основаны на сопоставлении растровому образу некоторого скалярного параметра, способ вычисления которого отражает интересующие исследователя характерные элементы изображения. Среди подобных скалярных параметров по частоте использования выделяется параметр, называемый (в некоторых случаях – весьма условно) *фрактальной размерностью*, определение которой восходит к работам Г. Минковского и Ф. Хаусдорфа. Размерность Хаусдорфа может быть сравнительно просто вычислена только для самоподобных множеств – *фракталов* [2]; в общем случае её определение весьма громоздко. Размерность Минковского для некоторого множества определяется так:

$$d_m = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon}{\ln \varepsilon}, \quad (2)$$

где N_ε – минимальное число множеств диаметра ε , которым покрывается исходное множество.

Обычно исследователи обращаются именно к определению (2). В частности, в [3] вместе с видоизменённым соотношением:

$$\ln N_\varepsilon = C - d_m \ln \varepsilon,$$

приводится алгоритм нахождения фрактальной размерности. Этот алгоритм состоит в наложении на изображение последовательности сеток с ячейками размера $\delta = 2^k$, $k = \overline{0, K}$, $K = \lfloor \log_2 L \rfloor$ (где L – размер изображения) и эмпирическом нахождении зависимости

$$d(k) = -\frac{\ln N_k}{\ln \delta}, \quad (3)$$

где N_k – число *ячеек* сетки, *полностью покрывающих* все элементы растра (пиксели), яркость которых выше (или ниже) заранее заданного порога. Подчёркивается [3] недостаток данного метода, состоящий в том, что найденное значение N_k не является *минимальным* числом ячеек, необходимых для покрытия.

Аналогия между (3) и определением (2) очевидна. В то же время соотношение (3) можно записать в виде:

$$d(k) = -\frac{\ln N_k}{\ln \delta} = -\frac{\ln N_k}{\ln 2^k} = -\frac{1}{k} \log_2 N_k.$$

Пусть априори изображение – не «фрактальное»: число пикселей выше (ниже) порога не зависит от масштабного уровня, пропорционально квадрату отношения размера изображения к размеру ячейки сетки:

$$\alpha \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 = \alpha \left(\frac{2^K}{2^k} \right)^2 = \alpha 2^{2(K-k)}, \quad \alpha \neq \alpha(\delta), \quad \alpha \in (0...1).$$

Пусть все «запороговые» пиксели находятся ниже прямой линии, проходящей через одну из вершин растрового образа. Тогда (при достаточно больших L) минимальное число ячеек сетки, покрывающих эти пиксели, оказывается пропорциональным числу пикселей: $N_k = \gamma 2^{2(K-k)}$, $\gamma = \gamma(\alpha)$, $\gamma \neq \gamma(\delta)$. Поэтому найденная по (3) «фрактальная» размерность оказывается равной:

$$\begin{aligned} d(k) &= -\frac{1}{k} \log_2 N_k = -\frac{1}{k} \log_2 (\gamma 2^{2(K-k)}) = \\ &= -\frac{1}{k} (\log_2 \gamma + 2(K-k)) = 2 \left(1 - \frac{K}{k} \right) - \beta, \end{aligned}$$

$$\text{где } \beta = \beta(k) = \frac{\log_2 \gamma}{k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \beta(k) = 0.$$

На первый взгляд, независимо от ε , будем иметь:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 \left(1 - \frac{K}{k} \right) - \beta \right) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{K}{k} \right) - \lim_{k \rightarrow \infty} \beta = 2;$$

«фрактальная» размерность совпала с топологической. При конечных значениях k найденное по предыдущей формуле значение оказывается меньше двух (второе слагаемое под знаком первого предела отрицательно и отлично от нуля). Однако в последнем соотношении не учтено то обстоятельство, что предельный переход $k \rightarrow \infty$ имеет смысл лишь при $K \rightarrow \infty$, $\frac{K}{k} \rightarrow 1$. Поэтому действительное значение предела оказывается равным нулю; с точки зрения фрактальной геометрии этот результат лишён смысла.

Полученное несоответствие является следствием существенной важности в определении (2) предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$, в то время как в (3) такой переход совершить принципиально невозможно (существует вполне определённый нижний масштабный уровень, соответствующий $\delta = 2^0 = 1$). На наш взгляд, метод анализа, в алгоритме которого лишь предусмотрен переход между уровнями, от уровня к уровню не меняющий саму схему подсчёта «запороговых» пикселей – по сути не обращается к возможной «дробной», «фрактальной» природе подлежащего анализу изображения.

Предложенному в [3] методу – при всей его универсальности – присущ ещё один недостаток: наличие глобального порогового значения яркости, которое используется при переходе от полутонового изображения к монохромному. Непосредственно к анализу исходного полутонового изображения метод неприменим.

Предпочтительным является отказ от использования глобального порога. *Видоизменённый алгоритм анализа должен фиксировать локальные различия яркостного поля.* Таким алгоритмом, в частности, является алгоритм двоичной декомпозиции изображения [4].

Суть указанного алгоритма состоит в последовательном анализе изображения на различных масштабных уровнях. При переходе к каждому последующему уровню размер анализируемой области уменьшается в два раза. Алгоритм можно представить в следующем виде.

1. Взять в качестве исследуемой области исходное изображение.
2. Найти минимальное и максимальное значения яркости в исследуемой области.
3. Если разность между максимальным и минимальным значением не превышает заранее заданного порогового значения (т.н. *порога разложения*) то сделать область *листом* двоичного дерева (листу сопоставляется среднее арифметическое минимального и максимального значений яркости – так называемое *конечное значение яркости*).

4. В противном случае разделить исследуемую область на две подобласти (в зависимости от размеров – вертикальной или горизонтальной прямой) и рекурсивно выполнить (со второго шага) алгоритм для каждой подобласти.

Результатом работы алгоритма является древовидная структура данных. Ее листья представляют участки изображения, в пределах которых яркость сохраняет приблизительно постоянное значение. Для данного порога разложения глубина двоичного дерева и зависимость числа листов от уровня определяются пространственным распределением яркости. Поэтому набор двоичных декомпозиций, выполненных для различных порогов разложения, исчерпывающим образом характеризует пространственное распределение яркости.

Исходной дискретной функции дерево двоичной декомпозиции сопоставляет две другие дискретные функции:

- функцию $I_F[c, r]$, совпадающую с конечным значением листа, покрывающего элемент в строке r и столбце c ;
- функцию $l_F[c, r]$, значение которой связано с глубиной листа, покрывающего элемент в строке r и столбце c .

Графические образы этих функций – *матрицы конечных значений* и *матрицы уровней* – являются визуальными представлениями двоичной декомпозиции.

С использованием изложенного алгоритма выполнен анализ изображений, полученных методами оптической (рис. 2) и сканирующей зондовой (рис.3) микроскопии. Порог разложения при выполнении декомпозиций был принят равным $0,1I_{\max}$ (где $I_{\max} = 1$ – максимальное значение яркости растрового образа, $I \in [0;1]$).

При построении матриц уровней глубине двоичного дерева было поставлено в соответствие значение яркости

$$V = 1 - e^{-\frac{d - d_{\max}}{2}},$$

где d и $d_{\max}$ – текущая и максимальная глубина дерева, соответственно.

Максимальной глубине листа дерева (наименьшему пространственному масштабу исходного изображения) соответствует нулевая яркость.

Матрицы конечных значений для рис. 2 и 3 приведены на рис. 4 и 6, матрицы уровней приведены на рис. 5 и 7.

Анализ матриц уровней позволяет выявить характерный масштаб, на котором проявляются неоднородности. Например, границе линейного кластера (правый верхний угол изображения на рис.3) соответствует тёмная линия на рис.7, покрываемая листьями наибольшей глубины. Сравнительный визуальный анализ также свидетельствует, что для изображений, образованных элементами сравнительно малых

размеров, матрицы конечных значений в целом повторяют исходные изображения.

Следует учитывать, что изображения имеют лишь вспомогательный характер. Конечной целью построения древовидной декомпозиции является количественное суждение, которое можно выполнить только на основе значений критерия, *выражаемого одним числом*.



Рис. 4. Матрица конечных значений изображения на рис. 2

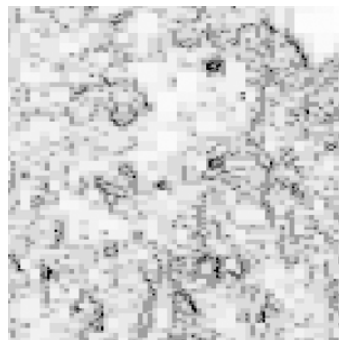


Рис. 5. Матрица уровней изображения на рис. 2

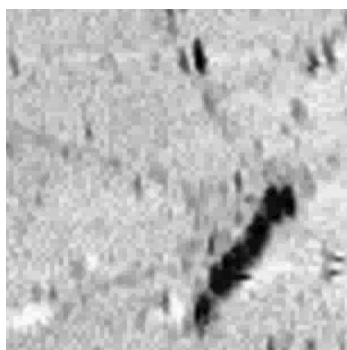


Рис. 6. Матрица конечных значений изображения на рис. 3

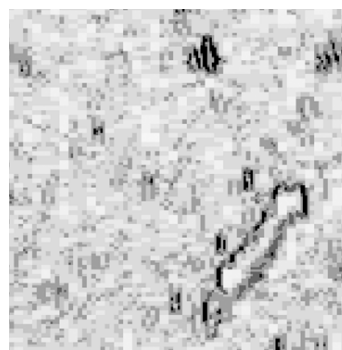


Рис. 7. Матрица уровней изображения на рис. 3

Для каждого масштабного уровня деревьев двоичной декомпозиции в [4] были найдены их *заселённости*:

$$P[l] = \frac{1}{\ln 2} \operatorname{arsh} N_l, \quad (4)$$

где N_l – число листов двоичного дерева на уровне l .

Сравнение (4) и определения (2) свидетельствует, что заселённость уровня имеет смысл произведения фрактальной размерности на номер масштабного уровня. Действительно, с учётом $\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\operatorname{arsh}(x) \sim \ln(2x) = \ln 2 + \ln x$, поэтому при больших l (важно, что увеличение номера уровня l соответствует уменьшению масштаба – т.е., имеет место аналогия с предельным переходом в (2)):

$$P[l] = \frac{\operatorname{arsh} N_l}{\ln 2} \sim \frac{\ln 2 + \ln N_l}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln N_l}{\ln 2},$$

откуда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{P[l]}{l} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{l} + \frac{\ln N_l}{l \ln 2} \right) \rightarrow -\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln N_l}{\ln \frac{1}{2^l}} = \left| \frac{1}{\delta} = 2^l \right|_{\delta \rightarrow 0} = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_l}{\ln \delta};$$

аналогия с определением размерности Минковского становится полной.

Таким образом, частное $d_l[l] = P[l]/l$ от деления заселённости на номер уровня имеет смысл *фрактальной размерности*.

Средние значения фрактальной размерности для эмпирических изображений микроструктуры составляют 1,63 (оптическая микроскопия) и 1,76 (сканирующая зондовая микроскопия). В целом, двоичная декомпозиция позволяет охарактеризовать распределение элементов изображения на различных масштабных уровнях, являясь более информативной, нежели точечные оценки моментов и вариационный ряд, найденные для изображения в целом.

Список литературы

1. Смирнов В. А., Королёв Е. В., Данилов А. М., Круглова А. Н. Фрактальный анализ микроструктуры наномодифицированного композита // Нанотехнологии в строительстве. 2011. № 5. С. 78–86.
2. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: W. H. Freeman, 1982. 460 p.
3. Crownover R. Introduction to Fractals and Chaos. Boston-London : Jones & Bartlett Publishers, 1995. 306 p.
4. Danilov A. M., Loganina V. I., Smirnov V. A. Quality estimation using binary image decomposition trees: application for analysis of decorative coatings // Архитектура и строительство. Наука и образование как фактор оптимизации среды жизнедеятельности : материалы междунар. науч.-практ. конф.-семинара. 11–16 октября 2004 г. Хаммамет, Тунис. 2004. С. 192–196.

Характеристическое уравнение многослойного сферического резонатора

Юлия Александровна Петрова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
petroval1999@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается система уравнений Максвелла в случае пространства с многослойным концентрическим шаром, которая сводится к решению скалярного уравнения для так называемых потенциалов Дебая. Получено характеристическое уравнение для экранированного и открытого концентрического сферического резонатора.

Ключевые слова: многослойный шаровой резонатор, уравнения Максвелла, электромагнитные колебания, потенциалы Дебая

Numerical study of the characteristic equation of a three-layer spherical resonator filled with metamaterial

Julia A. Petrova

Penza State University, Penza, Russia
petroval1999@rambler.ru

Abstract. Review the system of Maxwell's equations is solved in the case of a space with a multilayered concentric ball, which is reduced to solving a scalar equation for the so-called Debye potentials. The characteristic equation for open multilayered CSR has been obtained.

Keywords: multilayer layered ball resonator, maxwell's equations, electromagnetic oscillations, debye potentials

1. Постановка задачи

Рассмотрим две концентрические сферы радиусов $r = a$ и $r = b$ ($a < b$), пространство между которыми заполнено средой с проницаемостями ϵ_i, μ_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Будем называть такой резонатор N – слойный концентрический сферический резонатор (КСР). Слой i такого резонатора характеризуется радиусами $r_{i-1} \leq r \leq r_i$, причем $r_0 = a$ и $r_N = b$. В анализе ниже будем считать, что КСР заполнен однородной средой. В частных случаях, такая модель позволяет рассмотреть в пределе при $N \rightarrow \infty$ резонатор, заполненный радиально-неоднородной средой. А переход к многослойному сферическому резонатору осуществляется при $a = 0$.

Электрические и магнитные моды можно описать с помощью функций Боргниса $u_{nm}^{(e,h)}(r, \theta, \varphi)$ или потенциалами Дебая $U_{nm}^{(e,h)} = \frac{u_{nm}^{(e,h)}(r, \theta, \varphi)}{r}$ [1]. Для электрических мод имеем:

$$\begin{cases} E_r^e = \frac{n(n+1)}{r}; & E_\theta^e = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU_{nm}^e)}{\partial \theta \partial r}; & H_\varphi^e = \frac{i\omega \epsilon'}{r} \frac{\partial (rU_{nm}^e)}{\partial \theta}; \\ E_\varphi^e = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (rU_{nm}^e)}{\partial \varphi \partial r}; & E_\theta^e = \frac{i\omega \epsilon'}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (rU_{nm}^e)}{\partial \varphi}. \end{cases} \quad (1)$$

Для магнитных мод в этих формулах следует сделать замены $e \leftrightarrow h$, $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$. Если имеем полый КСР, то $\epsilon = \mu = 1$. Функции Боргниса удовлетворяют условиям, эквивалентным однородным уравнениям Максвелла, а потенциалы Дебая – волновому уравнению.

Подставим значение выражений (1) в однородные уравнения Максвелла и получим значение функций U_{nm}^e и U_{nm}^h в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U_{nm}^{e,h}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_{nm}^{e,h}}{\partial \varphi^2} + n(n+1) U_{nm}^{e,h} = 0; \\ \frac{\partial^2 (rU_{nm}^{e,h})}{\partial r^2} + k^2 (rU_{nm}^{e,h}) - \frac{n(n+1)}{r^2} (rU_{nm}^{e,h}) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $U_{nm}^{e,h} = P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} Z_n^{e,h}(kr)$. Уравнению (2) удовлетворяют присоединенные функции Лежандра, т. к. потенциалы пропорциональны $\exp^{-im\varphi}$, а двойное дифференцирование по азимуту в (4) дает $-m^2$. Функции $Z_n^{e,h}$ следует взять в виде:

$$\begin{aligned} Z_n^e(kr) &= \eta_n'(ka) j_n'(kr) - j_n'(ka) \eta_n'(kr), \\ Z_n^h(kr) &= \eta_n(ka) j_n(kr) - j_n(ka) \eta_n(kr), \end{aligned} \quad (3)$$

где $j_n(kr)$ и $\eta_n(kr)$ – сферические функции Бесселя и Неймана [2], а штрих означает производную. Характеристические уравнения для определения резонансных частот при условии электрической стенки при $r=b$ имеют вид:

$$Z_n^{e,h}(kb) = 0. \quad (4)$$

2. Характеристическое уравнение многослойного КСР

Ищем решение для электрических мод многослойного КСР в виде:

$$\begin{aligned}\bar{A}_i^e &= \vec{r}_0 \left[A_{ie}^+ U_{nm}^{e+}(r, \theta, \varphi) + A_{ie}^- U_{nm}^{e-}(r, \theta, \varphi) \right], \\ \bar{A}_i^h &= \vec{r}_0 \left[A_{ih}^+ U_{nm}^{h+}(r, \theta, \varphi) + A_{ih}^- U_{nm}^{h-}(r, \theta, \varphi) \right].\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь

$$U_{nm}^{\pm}(r, \theta, \varphi) = P_m^n(\cos\theta) e^{-im\varphi} \sqrt{\frac{2kr}{\pi}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2,1)}(kr),$$

причем знаку «плюс» соответствует функция Ганкеля второго рода, а знаку «минус» – первого рода. Поскольку функции Ганкеля имеют асимптотику [3]:

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(2,1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{\mp ikr},$$

решения представляют расходящиеся и сходящиеся сферические волны в слое i . Введем функции:

$$h_{n(2,1)}(kr) = \sqrt{\frac{2kr}{\pi}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2,1)}(kr)$$

нормированные волновые сопротивления $\rho_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}}$ и волновые числа

$k_i = k\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$. Сшивая поперечные компоненты полей, найдем электрические матрицы передачи слоев, связывающие их амплитуды в слоях i и $i+1$:

$$\begin{aligned}\hat{T}_{ni}^e &= \frac{k_i \varepsilon_i}{\Delta_{n(i+1)}^e} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \left(\frac{h'_{n2}(k_i r_i) h_{n1}(k_{i+1} r_i)}{k_{i+1} \varepsilon_i} - \frac{h'_{n1}(k_{i+1} r_i) h_{n2}(k_i r_i)}{k_i \varepsilon_{i+1}} \right) & \left(\frac{h'_{n2}(k_i r_i) h_{n1}(k_{i+1} r_i)}{k_{i+1} \varepsilon_i} - \frac{h'_{n1}(k_{i+1} r_i) h_{n2}(k_i r_i)}{k_i \varepsilon_{i+1}} \right) \\ \left(\frac{h'_{n2}(k_{i+1} r_i) h_{n2}(k_i r_i)}{k_i \varepsilon_{i+1}} - \frac{h'_{n2}(k_i r_i) h_{n2}(k_{i+1} r_i)}{k_{i+1} \varepsilon_i} \right) & \left(\frac{h'_{n2}(k_{i+1} r_i) h_{n1}(k_i r_i)}{k_i \varepsilon_{i+1}} - \frac{h'_{n1}(k_i r_i) h_{n2}(k_{i+1} r_i)}{k_{i+1} \varepsilon_i} \right) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta_{n(i+1)}^e = \left[h'_{n2}(k_{i+1} r_i) h_{n1}(k_{i+1} r_i) - h'_{n1}(k_{i+1} r_i) h_{n2}(k_{i+1} r_i) \right].$$

Построим матрицу передачи КСР:

$$\hat{T}_n^e = \prod_{i=1}^{N-1} \hat{T}_{ni}^e.$$

В последнем слое при электрической стенке следует положить:

$$A_{Ne}^+ h'_{n2}(k_N b) + A_{Ne}^- h'_{n1}(k_N b) = 0,$$

а в первом слое соответственно:

$$A_{1e}^+ h'_{n2}(k_1 a) + A_{1e}^- h'_{n1}(k_1 a) = 0.$$

Тогда имеем характеристическое уравнение:

$$\frac{A_{Ne}^+}{A_{Ne}^-} = -\frac{h'_{n1}(k_N b)}{h'_{n2}(k_N b)} = \frac{T_{n(11)}^e h'_{n1}(k_1 a) - T_{n(12)}^e h'_{n2}(k_1 a)}{T_{n(22)}^e h'_{n2}(k_1 a) - T_{n(21)}^e h'_{n1}(k_1 a)} \quad (6)$$

Если последний слой неограничен, следует наложить парциальное условие излучения $A_{Ne}^- = 0$ (открытый КСР). Обычно в этом случае последний слой – вакуум: $\rho_N = 1$. Вместо связи амплитуды прямых и обратных волн можно связывать компоненты полей в соседних слоях. Тогда имеем другие матрицы. Матрица $\hat{Q}_{ni}$, связывающая амплитуды $A_i^\pm$ с компонентами $E_{i\theta}$ и $H_{i\varphi}$ при $r = r_i$, очевидно, имеет вид:

$$\hat{Q}_{ni}^e = \frac{r_i}{\Delta_{ni}^e} \begin{bmatrix} \frac{h_{1n}(k_i r_i)}{k_i} & -\frac{iZ_0 h'_{1n}(k_i r_i)}{k\epsilon_i} \\ -\frac{h_{2n}(k_i r_i)}{k_i} & \frac{iZ_0 h'_{2n}(k_i r_i)}{k\epsilon_i} \end{bmatrix}.$$

Здесь $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$. Матрица передачи $\hat{a}_{ni}$, связывающая указанные компоненты при $r = r_i$ с соответствующими компонентами при $r = r_{i-1}$ имеет вид $\hat{a}_{ni}^e = \hat{Q}_{ni}^e {}^{-1} \hat{T}_{n(i-1)}^e \hat{Q}_{n(i-1)}^e$.

Список литературы

1. Смирнов Ю. Г., Петрова Ю. А. Численное и аналитическое исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытых неоднородных резонаторов // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 9. С. 1266–1273. EDN: JTGWFC
2. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1988. 440 с.
3. Давидович М. В., Стефюк Ю. В. Моды многослойного концентрического сферического резонатора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2009. Т. 12, № 4.

Особенности задач идентификации параметров динамических моделей

Полина Владимировна Санникова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
sannikovap@icloud.com

Аннотация. Работа посвящена задачам идентификации параметров динамической модели интегрального типа. Рассматриваются основные понятия идентификации, подходы к решению, виды и методы. Приводится конкретная задача идентификации нелинейной динамической модели и соответствующая численная схема.

Ключевые слова: идентификация, методы, нелинейные интегральные уравнения Вольтерра, полином Вольтерра, оценка эффективности

Features of dynamic model parameter identification problems

Polina V. Sannikova

Penza State University, Penza, Russia
sannikovap@icloud.com

Abstract. The paper is devoted to the problems of identifying the parameters of a dynamic model of integral type. The basic concepts of identification, approaches to the solution, types and methods are considered. A specific problem of identification of a nonlinear dynamic model and a corresponding numerical scheme are presented.
Keywords: identification, methods, nonlinear integral Volterra equations, Volterra polynom, efficiency evaluation

С развитием отраслей, затрагивающих сложные системы в производстве и естествознании, возникают задачи идентификации и анализа процессов, протекающих в различных динамических объектах.

Формирование математической модели объекта на основе наблюдений его входных и выходных сигналов называют идентификацией.

Решить задачу идентификации (в общем случае) – значит определить структуру и параметры модели, обеспечивающие наилучшую с точки зрения заданного критерия близость выходных функций модели и объекта при совпадающих входных воздействиях.

Различают параметрическую (состоит в определении модели, ее структуры и параметров) и непараметрическую идентификацию (состоит в определении наилучшей аппроксимации характеристик системы по полученному экспериментальному набору данных).

Основной подход решения задачи по идентификации динамической модели:

1. Выбор модели, входного сигнала $u(t)$ постановка эксперимента.
2. Проведение эксперимента, получение $u(t)$ $y(t)$. Предварительный анализ данных, выбор метода идентификации.
3. Решение задачи идентификации.
4. Анализ сходимости полученных результатов и вычисление погрешности.

Непараметрическая идентификация – это оценка временных и частотных характеристик динамических систем без параметризации математической модели, что численно соответствует определению вектора значений искомой характеристики.

Виды непараметрической идентификации:

1. Временные характеристики:
 - Метод импульсивного воздействия
 - Метод ступенчатого воздействия
2. Подход на основе прогноза ошибок:
 - Метод синусоидального воздействия
 - Эмпирическая оценка придаточной функции

Параметрическая идентификация – это определение структуры, формы описания модели и оценки ее параметров, имеющих фиксированное количество и положение в структуре модели.

Виды параметрической идентификации:

3. Подход на основе моделирования:
 - Нелинейный метод наименьших квадратов
4. Подход на основе прогноза ошибок:
 - На базе критерия наименьших квадратов
 - На базе критерия максимального подобия
 - На базе критерия метода апостериорного максимума
5. Корреляционный метод:
 - Методы инструментальных переменных

Возможные различные методы идентификации существенно зависят от разных форм представления математических моделей – обыкновенных дифференциальных, линейных и нелинейных интегральных уравнений, разностных уравнений, уравнений свертки и т.д. При этом ни один из методов идентификации не является универсальным для идентификации всех видов математических моделей, а используется в отдельных областях применения [3].

Можно отдельно выделить задачи идентификации динамической модели, которые решаются с применением ортогональных полиномов.

Важно заметить, что для нахождения ядер Вольтерра требуется вычислять различные частные производные от правой части уравнений,

а это уже само по себе является некорректной задачей в случае реальных данных. При этом сама задача моделирования отклика нелинейной динамической системы на произвольное входное возмущение полиномами Вольтерра, вообще говоря, не требует знания самих ядер $K_i(s_1, \dots, s_i), i=1, n$ достаточно вычислить интегралы от них.

Таким образом, если исходную задачу идентификации ядер Вольтерра переформулировать в задачу поиска интегралов от этих ядер, то неустойчивых операций численного дифференцирования можно избежать. Особенно это актуально на практике, исходные данные зашумлены погрешностями измерений. В этом случае задача идентификации полинома Вольтерра сводится к задаче нахождения интегралов от ядер, при этом вместо решения многомерных интегральных уравнений достаточно решить определенный набор систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [2].

Постановка задачи. Напомним понятие интегро-степенного ряда:

$$F[x(t)] = K_0 + \int_a^b K_1(t, s) x(s) ds + \int_a^b \int_a^b K_2(t, s_1, s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2 + \dots + \int_a^b \int_a^b \int_a^b K_3(t, s_1, s_2, s_3) x(s_1) x(s_2) x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots, t \in [a, b] \quad (1.1)$$

где показано, что если $F[x(t)]$ имеет производную по Фреше любого порядка, то (1.1) есть обобщение формулы Тейлора для функции n независимых переменных. В (1.1) функции $K_n(t, s_1, \dots, s_n)$ непрерывны по всем своим аргументам и симметричны по $s_1, \dots, s_n$.

Теперь предположим, что независимая переменная $t \in [a, b]$ имеет физический смысл времени, $x(t)$ – скалярный входной сигнал некоторой динамической системы, а $F[x(t)] = y(t)$ – реакция этой системы на входной сигнал.

Тогда $F[x(t)]$ есть оператор (отображение), для которого (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} y(t) &= F[x^{(0)}(t)] + \int_a^t K_1(t, s) x(s) ds + \int_a^t \int_a^t K_2(t, s_1, s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2 + \\ &+ \int_a^t \int_a^t \int_a^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x(s_1) x(s_2) x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots = \\ &= K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^t \dots \int_a^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, t \in [a, b]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

По известной теореме Фреше, в случае непрерывной зависимости выходного сигнала $y(t)$ от входного сигнала $x(t)$, модель типа «вход-выход», соответствующая конкретной физически реализуемой динамической системе, однозначно определяется набором ядер $K_i, i=1, 2, \dots$. Метод нахождения K_i путем обработки массива входных сигналов и откликов на них (выходных сигналов) называется идентификацией системы.

Уравнение (1.2), заменив знак ∞ на N , обозначающий количество слагаемых полинома и положив $a=0, b=T$, можно записать в следующем виде [6]:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_a^t \dots \int_a^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(t-s_k) ds_k, \quad t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

Нелинейные динамические модели в виде полинома Вольтерра требует решения задач параметрической (определение необходимого числа членов (1.3)) и непараметрической (оценка ядер Вольтерра соответствующих порядков) идентификации. Обычно ограничиваются значениями $N=2, 3$. Это связано с существенно возрастающей вычислительной сложностью определения каждого последующего слагаемого полинома (1.3). В то же время ограничение двумя-тремя слагаемыми с целью получить приемлемую точность моделирования возможно, как правило, лишь в случае слабой нелинейности. Как следствие, это накладывает условия на величину амплитуды входных сигналов системы. Если возмущения относительно велики, то только совокупность моделей, обслуживающих определенный диапазон изменения входных сигналов, может обеспечить приемлемую с практической точки зрения точность.

Таким образом, оценка эффективности применения полиномов Вольтерра зависит от оценки возможности быстрого и надежного определения первых двух-трех слагаемых (1.3) [1].

Рассмотрим отрезок интегро-степенного ряда Вольтерра – полином Вольтерра:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [0, T]. \quad (1.4)$$

Предположим, ядра Вольтерра $K_n, n=1, N$, определены каким-либо способом. При известных K_n становится возможным не только найти отклик $y(t)$ нелинейной динамической системы на произвольный непрерывный входной сигнал $x(t)$, но и перейти к качественно иному

этапу математического моделирования, тесно связанному с задачей автоматического управления техническим объектом – нахождению такого $x(t)$, которому соответствует заданный (желаемый) отклик $y(t)$.

Введем следующие обозначения:

$$V_n x^n = \int_0^t \dots \int_0^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{i=1}^n x(s_i) ds_i \quad (1.5)$$

и

$$P_N(x(t)) = \sum_{n=1}^N V_n x^n, \quad (1.6)$$

тогда уравнение (1.4) в операторной форме имеет вид

$$P_N(x(t)) = y(t), t \in [0, T]. \quad (1.7)$$

Предположим, что $K_1(t, s)$ удовлетворяет (1.7), а ядра K_n , $n = \overline{2, N}$, симметричны относительно $s_1, \dots, s_n$, непрерывны по множеству переменных и непрерывно дифференцируемы по t .

Итак, если $y(t)$ принадлежит диапазону значений оператора PN , рассматриваемого действующим из $C_{[0, T]}$ в $C_{[0, T]}^{(1)}$, $0 < T < \infty$, то есть для некоторого $x_N^*(t) \in C_{[0, T]}$, $y(t) = P_N(x_N^*(t))$, то $x_N^*(t)$ является глобальным вещественным непрерывным решением уравнения (1.7) [5]. Задача заключается именно в том, чтобы конструктивно описать область $R(PN)$ значения интегрального оператора (1.7) при заданных ядрах Вольтерра K_n , $n = \overline{1, N}$. Рассмотрим ее на простейшем примере квадратичного полинома Вольтерра ($N = 2$) и постоянных ядер $K_1(t, s) = 1$, $K_2(t, s_1, s_2) = \lambda \neq 0$.

В этом случае (1.7) переходит в уравнение:

$$\int_0^t x(s) ds + \lambda \left(\int_0^t x(s) ds \right)^2 = y(t), t \in [0, T]. \quad (1.8)$$

Случай $k = 0$. Так как $y(0) = 0$, то в окрестности точки $t = 0$

$$y(t) = ty'(\xi), 0 \leq \xi \leq t. \quad (1.9)$$

Обозначим

$$F(t) = \max_{0 \leq \xi \leq t} |y'(\xi)|. \quad (1.10)$$

Очевидно, из неравенства

$$tF(t) < \frac{1}{4|\lambda|} \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.11)$$

следует

$$|y(t)| < \frac{1}{4|\lambda|} \forall t \in [0, T], \quad (1.12)$$

но (1.11) не может выполняться ни при каком $0 < T < \infty$, так как функция $F(t)$ непрерывна и монотонно не убывает, функция $tF(t)$ непрерывна и строго возрастает, равна нулю при $t=0$, поэтому очевидно, что существует единственный корень $t=T^*$ уравнения

$$tF(t) = \frac{1}{4|\lambda|}. \quad (1.13)$$

Таким образом, достаточное условие (1.12) гарантированно выполняется лишь при $T < T^*$. В целом, вопрос об оценках максимально возможной области определения вещественного непрерывного решения для заданных ядер Вольтерра и правой части (1.7) оказывается в теории полиномиальных уравнений Вольтерра I рода ключевым [4].

Список литературы

1. Апарцин А. С., Солодуша С. В., Спиряев В. А., Щербинин М. С. Идентификация полиномов Вольтерра на базе метода product integration // Тихонов и современная математика : тезисы докладов Междунар. конф. М. : Издат. отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2006. С. 30.
2. Каминаскас, В. Идентификация динамических систем по дискретным наблюдениям. Вильнюс : Мокслас, 1985. 152 с.
3. Масленников А. Л. Теория идентификации. М. : МГТУ, 2019. 98 с.
4. Спиряев В. А. Интегральные модели динамических систем и их приложения в теплоэнергетике : дис. ... канд. техн. наук. Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2023. 177 с.
5. Tynda A. N., Sidorov D. N. Inverse Problem for the Integral Dynamic Models with Discontinuous Kernels // Mathematics 2022. Vol. 10. P. 3945. doi: 10.3390/math10213945
6. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In: L.O.CHUA, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Singapore : World Scientific Press, 2015. Vol. 87.

Математическое моделирование аэроупругой системы «трубопровод – датчик давления»

**Юлия Александровна Тамарова¹,
Петр Александрович Вельмисов²,
Николай Дмитриевич Алексанин³,
Григорий Андреевич Анкилов⁴**

^{1,2,3,4}Ульяновский государственный технический университет,
Ульяновск, Россия

¹kazakovaua@mail.ru, ²velmisov@ulstu.ru, ³nickx73@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается трехмерная модель механической системы «трубопровод – датчик давления», предназначенной для контроля давления рабочей среды в камерах сгорания двигателей. На основе предложенной модели исследуется совместная динамика упругого чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. Движение рабочей среды описывается линейными моделями механики жидкости и газа, для описания динамики упругого чувствительного элемента применяются линейные модели механики твердого деформируемого тела. Исследование задачи с помощью введения интегральных характеристик сводится к исследованию одномерной модели. Получены уравнения, позволяющие по величине деформации чувствительного элемента датчика определять давление рабочей среды в камере сгорания в каждый момент времени. Предложены аналитические и численные методы решения соответствующих начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений. Также проведен численный эксперимент и представлены примеры расчета динамики чувствительного элемента датчика.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, аэроупругость, упругий элемент, деформация, датчик давления, трубопровод, динамика

Финансирование: работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №23-21-00517.

Mathematical modeling of the aeroelastic system “Pipeline – pressure sensor”

**Yulia A. Tamarova¹, Petr A. Velmisov², Nikolay D. Aleksanin³,
Grigoriy A. Ankilov⁴**

^{1,2,3,4}Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia

¹kazakovaua@mail.ru, ²velmisov@ulstu.ru, ³nickx73@yandex.ru

Abstract. The three-dimensional model of the mechanical system "pipeline – pressure sensor" is considered, designed to control the pressure of the working medium in the combustion chambers of engines. Based on the proposed model, the joint

dynamics of the elastic sensing element of the pressure sensor and the working medium in the pipeline are investigated, assuming that the medium is ideal and compressible. The motion of the working medium is described by linear models of fluid and gas mechanics, linear models of mechanics of a solid deformable body are used to describe the dynamics of an elastic sensing element. The study of the problem by introducing integral characteristics is reduced to the study of a one-dimensional model. Equations are obtained that allow determining the pressure of the working medium in the combustion chamber at each moment of time by the magnitude of the deformation of the sensor element. Analytical and numerical methods for solving the corresponding initial-boundary value problems for systems of differential equations are proposed. A numerical experiment is also carried out and examples of calculating the dynamics of the sensor element are presented.

Keywords: differential equations, aeroelasticity, elastic element, deformation, pressure sensor, pipeline, dynamics

Acknowledgments: the work was supported by the grant of the Russian Science Foundation No. 23-21-00517.

Первичным звеном приборного оборудования для измерения давления газожидкостной среды является датчик. Описание датчиков измерительных систем, принципов их работы, технических характеристик представлено, например, в работах [1–8]. Данная работа является продолжением исследований авторов, проведенных в работах [9–12].

Принципиальная схема системы «трубопровод – датчик давления», в которой на одном конце трубопровода (на выходе из камеры сгорания двигателя) $x = 0$ задан закон изменения давления рабочей среды, а на другом ($x = l$) расположен датчик, предназначенный для измерения этого давления и содержащий в качестве составной части чувствительный упругий элемент в виде пластины, представлена на рис. 1.

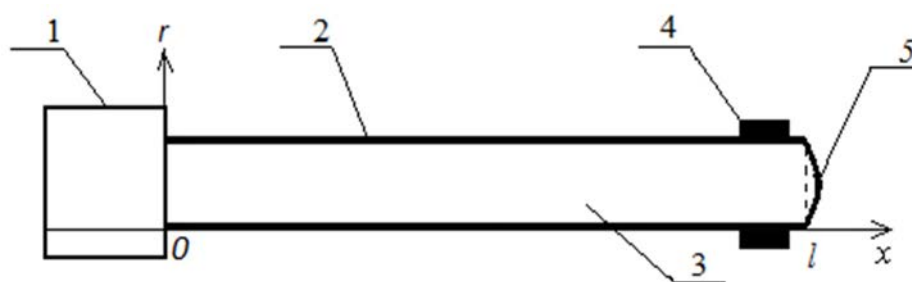


Рис. 1. Схема механической системы «трубопровод – датчик давления»: 1 – двигатель, 2 – трубопровод, 3 – рабочая среда, 4 – датчик, 5 – упругий элемент датчика

Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей трехмерной модели системы «трубопровод-датчик давления» в цилиндрических координатах для трубопровода с поперечным сечением в виде сектора, имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left(\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{1}{r^2} + \varphi_{\theta\theta} \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R),$$

$$\theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (1)$$

$$\varphi_r(x, R, \theta, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (2)$$

$$\varphi_\theta(x, r, \theta_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (3)$$

$$\varphi_x(l, r, \theta, t) = w_t(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (4)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, \theta, t) = P(r, \theta, t), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (5)$$

$$L(w(r, \theta, t)) \equiv m w_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta (\Delta^2 w)_t + f(w_t, w) =$$

$$= P_0 - \rho_0 \phi_t(l, r, \theta, t) - P_*,$$

$$r \in (0, R), \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2), \quad (6)$$

где $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial r^2} +$$

$$+ \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

В (1)–(6) $\varphi(x, r, \theta, t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с поперечным сечением в виде сектора, образованного лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и окружностью $r = R$; $w(r, \theta, t)$ – деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода $x = l$; ρ_0, P_0, a_0 – плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; $P(r, \theta, t)$ – заданный закон изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$; R – радиус трубопровода и упругого элемента, представляющего собой деформируемую пластину, имеющую, также как и поперечное сечение трубопровода, форму сектора, ограниченного прямыми $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и окружностью $r = R$ радиуса R ;

P_* – внешнее воздействие на упругий элемент; $m = \rho_{pl} h_{pl}$ – погонная масса упругого элемента с плотностью ρ_{pl} и толщиной h_{pl} ;

$D = \frac{E h_{pl}^3}{12(1 - \nu^2)}$ – изгибная жесткость упругого элемента, где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона; N – сжимающее

(растягивающее) элемент усилие; β – коэффициент внутреннего демпфирования; $f(\dot{w}, w)$ – некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации $w(r, t)$ и скорости деформации $\dot{w}(r, t)$; индексы x, r, θ, t снизу обозначают частные производные по координатам x, r, θ и времени t , точка сверху – производную по t .

Уравнение (1) описывает движение идеального газа в трубопроводе с поперечным сечением в виде сектора; (2)–(4) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (6) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций $\phi(x, r, \theta, t)$, $w(r, \theta, t)$, которая должна быть дополнена начальными условиями. Необходимо также задать граничные условия для $w(r, \theta, t)$ при $r = R$, $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, соответствующие типу закрепления элемента. Для жесткого защемления условия имеют вид:

$$w(R, \theta, t) = w_r(R, \theta, t) = 0, \quad w(r, \theta_1, t) = w_\theta(r, \theta_1, t) = 0, \\ w(r, \theta_2, t) = w_\theta(r, \theta_2, t) = 0.$$

Для решения задачи (1)–(6) введем интегральные характеристики основных величин динамической системы

$$\Phi(x, t) = \iint_D \phi(x, r, \theta, t) r dr d\theta, \quad \xi(t) = \iint_D w(r, \theta, t) r dr d\theta, \\ G(t) = \iint_D P(r, \theta, t) r dr d\theta, \quad Q(t) = \iint_D L(w(r, \theta, t)) r dr d\theta, \quad (7)$$

где область интегрирования $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$. Тогда, проводя в (1)–(6) интегрирование по области D , получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad (8)$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \quad (9)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \quad (10)$$

$$(P_0 - P_*) \frac{R^2 (\theta_2 - \theta_1)}{2} - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(t). \quad (11)$$

Пусть, например,

$$L(w(r, \theta, t)) = m w_{tt} + D \Delta^2 w + N \Delta w + \beta (\Delta^2 w)_t + \alpha w_t + \gamma w,$$

где α, γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи. Тогда система (8)–(11) принимает вид

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \quad (12)$$

$$\Phi_x(l, t) = w_0 \psi(t), \quad (13)$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \quad (14)$$

$$(P_0 - P_*) \frac{R^2 (\theta_2 - \theta_1)}{2} - \rho_0 \Phi_t(l, t) = m_0 \ddot{\psi}(t) + \alpha_0 \dot{\psi}(t) + \gamma_0 \psi(t) \quad (15)$$

В (13)–(15) введены обозначения

$$\begin{aligned} m_0 &= m \iint_D g(r, \theta) r dr d\theta, \quad \alpha_0 = \alpha \iint_D g(r, \theta) r dr d\theta + \beta \iint_D \Delta^2 g(r, \theta) r dr d\theta, \\ \gamma_0 &= D \iint_D \Delta^2 g(r, \theta) r dr d\theta + N \iint_D \Delta g(r, \theta) r dr d\theta + \gamma \iint_D g(r, \theta) r dr d\theta, \\ w_0 &= \iint_D r g(r, \theta) dr d\theta, \end{aligned}$$

при этом $w(r, \theta, t) = \psi(t)g(r, \theta)$, где функция $g(r, \theta)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента.

Предложены и реализованы несколько способов исследования системы (12)–(15).

1. Аналитическое решение задачи приводит к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом. В этом случае общее решение уравнения (12) записывается в виде:

$$\Phi(x, t) = A\left(t - \frac{x}{a_0}\right) + B\left(t + \frac{x}{a_0}\right), \quad (16)$$

где A, B – произвольные функции своих аргументов. Подставляя (16) в (13)–(15) и проводя ряд несложных математических действий, получим дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее функцию $\psi(t)$, характеризующую деформацию чувствительного элемента датчика, с функцией $G(t)$, характеризующей закон изменения давления рабочей среды в двигателе

$$\begin{aligned} &m_0 \left[\ddot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \\ &+ \alpha_0 \left[\dot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \gamma_0 \left[\psi\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \psi\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] - \\ &- \rho_0 a_0 w_0 \left[\dot{\psi}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\psi}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = 2 \left[G(t) + (P_0 - P_*) \frac{R^2 (\theta_2 - \theta_1)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Если $\frac{l}{a_0} = \varepsilon$ – малый параметр (например, для воздуха

$a_0 \approx 330$ м/с при температуре 0°C , а длина l не превышает нескольких метров), то, проводя в (17) разложение по степеням ε и отставляя старшие по порядку члены, можно получить приближенное уравнение (без отклонения аргумента t), связывающее $\psi(t)$ и $G(t)$

$$\begin{aligned}
& (m_0 + \rho_0 w_0 l) \ddot{\psi}(t) + \alpha_0 \dot{\psi}(t) + \gamma_0 \psi(t) + \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\left(m_0 + \frac{1}{3} \rho_0 w_0 l \right) \psi^{(4)}(t) + \alpha_0 \ddot{\psi}(t) + \gamma_0 \ddot{\psi}(t) \right] + \\
& + O(\varepsilon^4) = G(t) + (P_0 - P_*) \frac{R^2 (\theta_2 - \theta_1)}{2}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Решения линейного дифференциального уравнения (18) с постоянными коэффициентами строятся как численно, так и аналитически, в частности было проведено исследование резонансных явлений в случае пульсирующего давления в камере сгорания.

2. Численно-аналитическое исследование задачи проводилось с помощью метода Галеркина. В этом случае $\Phi(x, t)$ представляется в виде отрезков рядов по полным на интервале $(0, l)$ системам функций $\{z_m(x)\}$, которые удовлетворяют однородным граничным условиям, соответствующим условиям (13), (14) или (14), (15). В результате исследование сведено к решению задачи Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, на основе которой проведен численный эксперимент.

3. Численное исследование задачи (12)–(15) проводилось также на основе конечно – разностного метода. При этом использовалась явная схема, на основе которой проведен численный эксперимент.

Разработан программный комплекс для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления». Он предназначен для исследования совместной динамики чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе, соединяющем камеру сгорания двигателя с датчиком, и позволяет получать графики функции $\psi(t)$, характеризующей деформацию упругого элемента датчика, при различном задании механических параметров системы, в том числе при задании закона изменения давления рабочей среды в двигателе.

Пример 1. Пусть рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1.2$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{pl} = 2.7 \cdot 10^3$). Параметры системы: $P_0 = 101325$, $P_* = 0$, $a_0 = 343$ (при температуре 20°C), $l = 3$, $h_{pl} = 0.005$,

$$m = \rho_{pl} h_{pl} = 13.5, \quad v = 0.34, \quad D = \frac{E h_{pl}^3}{12(1 - v^2)} = 824.7, \quad R = 0.025, \quad \theta_1 = 0,$$

$\theta_2 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.3$, $\beta = 100$, $N = 0$ (все значения приведены в системе СИ).

С помощью математической системы Mathematica численно получены решения уравнения (18) в случаях жесткого защемления и шарнирного закрепления. Начальные условия заданы в виде:

$$\psi(0) = \dot{\psi}(0) = \ddot{\psi}(0) = \ddot{\psi}(0) = 0.$$

Для жесткого защемления задана функция

$$g(r, \theta) = \left[1 - 3(r/R)^2 + 2(r/R)^3 \right] \cdot (\theta - \theta_1)^2 \cdot (\theta - \theta_2)^2.$$

На рис. 2 представлены результаты расчетов при различных заданиях закона изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод $P(r, \theta, t)$.

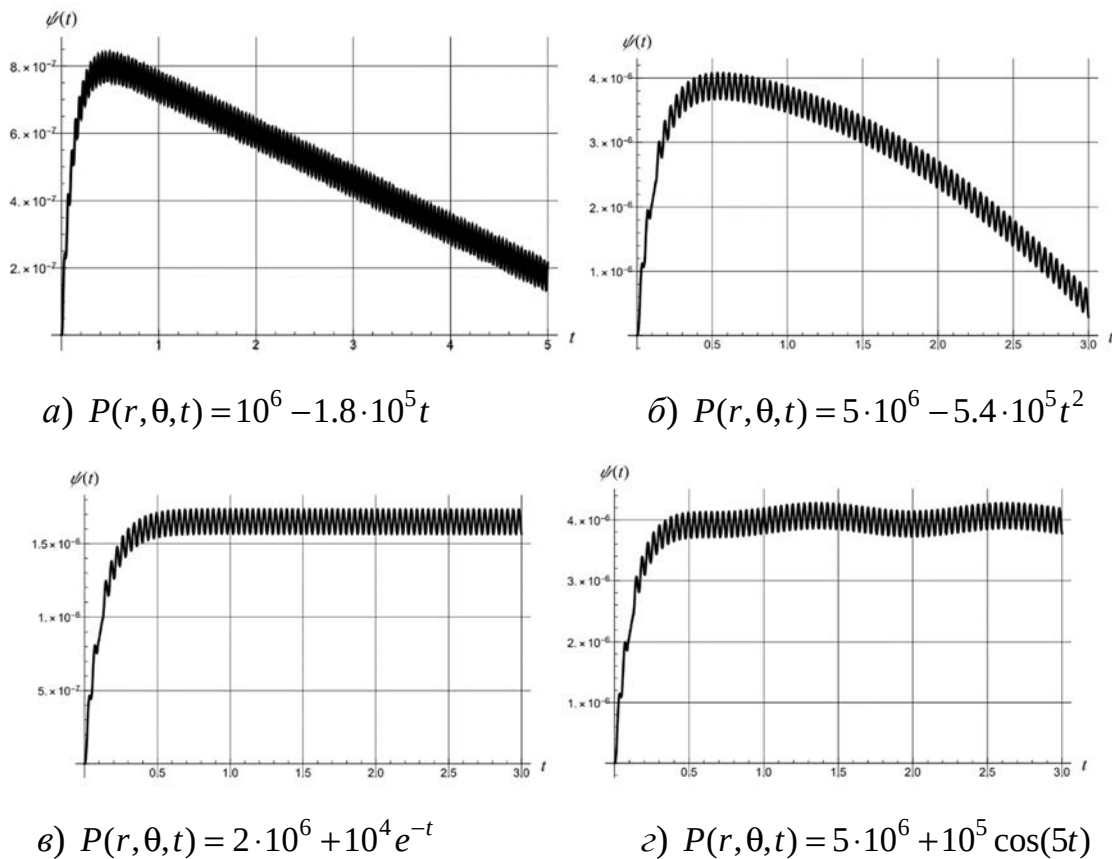


Рис. 2. Графики функции деформации упругого элемента датчика $\psi(t)$

Графики а), б) соответствуют остановке двигателя, графики в), г) соответствуют случаям, когда на постоянное рабочее давление в двигателе, находящемся в стационарном режиме работы, наложены экспоненциально убывающее (в)) или периодическое (г)) возмущения.

Следует отметить, что решение задачи (12)–(15), построенное с помощью метода Галеркина, и решение, полученное по методу конечных разностей, достаточно точно согласуются с численным решением уравнения (18).

Список литературы

1. Белозубов Е. М., Васильев В. А., Запевалин А. И., Чернов П. С. Проектирование упругих элементов нано- и микроэлектромеханических систем // Измерительная техника. 2011. № 1. С. 17–19.
2. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 408 с.
3. Аш Ж. [и др.]. Датчики измерительных систем : в 2 кн. Кн. 1 / пер. с франц. М. : Мир, 1992. 480 с.
4. Аш Ж. [и др.]. Датчики измерительных систем : в 2 кн. Кн. 2 / пер. с франц. М. : Мир, 1992. 424 с.
5. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. М. : Машиностроение, 1965. 928 с.
6. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1980. 264 с.
7. Пирогов С. П. Манометрические трубчатые пружины. СПб. : Недра, 2009. 276 с.
8. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. 2-е изд. М. : Машиностроение, 1981. 392 с.
9. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, № 3. С. 352–367.
10. Тамарова Ю. А., Вельмисов П. А., Алексанин Н. Д., Нуруллин Н. И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // Журнал СВМО. 2021. Т. 23, № 4. С. 461–471.
11. Velmisov P. A., Tamarova Y. A., Pokladova Y. V. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2333. P. 120004. doi: 10.1063/5.0041778
12. Velmisov P. A., Tamarova Y. A., Pokladova Y. V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2021. Vol. 255 (5). P. 587–594. doi: 10.1007/s10958-021-05395-2

Нелинейная задача на собственные значения, описывающая распространение ТЕ-волны в диэлектрическом волноводе, покрытом слоем графена

Станислав Вячеславович Тихов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
tik.stanislav2015@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача о распространении электромагнитной ТЕ-волны терагерцового диапазона в плоском диэлектрическом волноводе, на одну из поверхностей которого нанесен графен. Учитывается сильная кубическая нелинейность графена. Задача о распространении волны сводится к задаче на собственные значения. Получены результаты, устанавливающие существование собственных волн, поддерживаемых указанной волноводной структурой, а также представлены некоторые численные результаты.

Ключевые слова: нелинейная задача на собственные значения, электромагнитные волны, ТЕ-волны, плоский диэлектрический волновод, графен, нелинейность в графене

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20087).

Nonlinear eigenvalue problem on TE-wave propagation in a dielectric waveguide covered with graphene layer

Stanislav V. Tikhov

Penza State University, Penza, Russia
tik.stanislav2015@yandex.ru

Abstract. We consider the problem on the propagation of electromagnetic TE-wave of the terahertz range in a plane dielectric waveguide with graphene on one of its boundaries. The strong cubic nonlinearity of graphene is taken into account. The wave propagation problem is reduced to the eigenvalue problem. The results establishing the existence of natural waves, supported by the specified waveguide structure, are obtained. Some numerical results are presented as well.

Keywords: nonlinear eigenvalue problem, electromagnetic waves, TE-waves, plane dielectric waveguide, graphene, nonlinearity in graphene

Acknowledgments: this study is supported by the Russian Science Foundation under grant 20-11-20087.

Введение

Направляющие свойства графеновых структур играют важную роль для практических приложений. Способность структуры, образо-

ванной двумя графеновыми слоями и разделяющим их тонким диэлектрическим слоем, удерживать локализованные плазмонные моды изучалась во многих работах, например [1, 2]. Однако до сих пор направляющие свойства таких структур изучались без учета сильной нелинейности в графене.

В данной работе исследуется задача о распространении ТЕ-волны в плоском диэлектрическом волноводе, на одну из поверхностей которого нанесен графен; главной особенностью данного исследования является учет нелинейного взаимодействия носителей заряда в графене с электромагнитной волной.

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитную ТЕ-волну $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, где

$$\mathbf{E} = (0, E_y(x), 0)e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (H_x(x), 0, H_z(x))e^{i\gamma z} \quad (1)$$

есть комплексные амплитуды, ω – круговая частота и γ есть вещественный параметр, которая распространяется в плоском диэлектрическом слое, расположенном между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. На границе $x = h$ волновода находится слой графена, а граница $x = 0$ открыта.

Волновод заполнен однородной изотропной средой с проницаемостью ϵ_2 ; полупространства $x < 0$ и $x > h$ заполнены однородными изотропными средами, с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_3 , соответственно; причем $1 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_3 \leq \epsilon_2$. Всюду магнитная проницаемость $\mu = \mu_0$, где μ_0 есть магнитная постоянная.

Поле (1) удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0\epsilon\mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2)$$

где ϵ_0 есть диэлектрическая постоянная, $\epsilon = \epsilon_1$, если $x < 0$, $\epsilon = \epsilon_2$, если $0 < x < h$ и $\epsilon = \epsilon_3$ иначе, условию затухания на бесконечности, условию непрерывности касательных компонент электрического и магнитного полей на границе $x = 0$, условию непрерывности касательной компоненты электрического поля на границе $x = h$, условию сопряжения вида

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-] = \mathbf{j} = \sigma_g \mathbf{E}, \quad (3)$$

где σ_g есть электрическая проводимость графена.

Электрическая проводимость σ_g имеет вид $\sigma_g = \sigma^{(1)} + \sigma^{(3)} |\mathbf{E}|^2$, где $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(3)}$ есть постоянные, такие, что $\sigma^{(1)} = i\sigma'$, $\sigma^{(3)} = -i\sigma''$, $\sigma'' > 0$. Такое ограничение на σ_1 справедливо в ТГц-диапазоне.

В [3] показано, что задача о распространении волны эквивалентна краевой задаче $\mathcal{P}$, состоящей в нахождении чисел $\gamma = \hat{\gamma} > \sqrt{\varepsilon_3}$, таких, что существует функция $u \equiv u(x; \hat{\gamma}) \in C^2[0, h]$, являющаяся решением уравнения

$$u''(x) = -(\varepsilon_2 - \gamma^2)u(x) \quad (4)$$

и удовлетворяющая краевым условиям

$$u'(0) - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} \cdot u(0) = 0, \quad (5)$$

$$u'(h) + \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} \cdot u(h) = -i \cdot 120\pi (\sigma^{(1)} + \sigma^{(3)} u^2(h)) u(h), \quad (6)$$

а также дополнительному условию

$$u(0) = A, \quad (7)$$

где A есть некоторая постоянная, необходимому для определения дискретных решений задачи. Число $\hat{\gamma}$ будем называть собственным значением задачи $\mathcal{P}$, а функцию $u(x; \hat{\gamma})$ – собственной функцией задачи $\mathcal{P}$.

Если в (6) положить $\sigma^{(3)} = 0$, то задача $\mathcal{P}$ вырождается в линейную задачу $\mathcal{P}_0$.

2. Основные результаты

Введем обозначения $\bar{\sigma}_1 = i \cdot 120\pi \sigma^{(1)}$, $\bar{\sigma}_3 = i \cdot 120\pi \sigma^{(3)}$, $\lambda^2 = \varepsilon_2 - \gamma^2$, $\epsilon_1^2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\epsilon_3^2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$. Характеристическое уравнение задачи $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\varepsilon_1^2 - \lambda^2} \sqrt{\varepsilon_3^2 - \lambda^2} - |\bar{\sigma}_1| \sqrt{\varepsilon_1^2 - \lambda^2} - \lambda^2 \right) \sin \lambda h + \\ & + \left(\sqrt{\varepsilon_3^2 - \lambda^2} + \sqrt{\varepsilon_1^2 - \lambda^2} - |\bar{\sigma}_1| \right) \lambda \cos \lambda h = \\ & = -|\bar{\sigma}_3| \lambda^{-2} A^2 (\sqrt{\varepsilon_1^2 - \lambda^2} \sin \lambda h + \lambda \cos \lambda h)^3. \end{aligned} \quad (8)$$

С физической точки зрения, выражение (8) является дисперсионным уравнением, связывающим толщину волновода и его постоянные распространения. Исследуя уравнение (8), можно получить следующий результат.

Теорема 1. Если выполняются условия

$$|\sigma_3| A^2 \min \{3; \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^{-2}\} > |\sigma_1|, \quad h > \frac{(1+2n)\pi \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2}}{2\varepsilon_1 \varepsilon_3},$$

то задача $\mathcal{P}$ имеет по крайней мере n собственных значений $\hat{\gamma}_k \in (\gamma_*, \gamma^*)$, где

$$\gamma_* = \sqrt{\frac{\epsilon_2^2 - \epsilon_1 \epsilon_3}{2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3}}, \quad \gamma^* = \sqrt{\epsilon_2 + \lambda_*'^2}$$

и λ_*' определяется как

$$\lambda_*' = \max \left\{ \frac{\sqrt{|\bar{\sigma}_1|^2 + |\bar{\sigma}_1| \sqrt{|\bar{\sigma}_1|^2 + 16\epsilon_1^2}}}{2\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{|\bar{\sigma}_1|}{2}} \right\}.$$

Теорема 1 фактически дает достаточное условие для существования собственных волн, поддерживаемых рассматриваемым волноводом.

3. Численные результаты

Ниже представлены некоторые численные результаты. В вычислениях использовались следующие параметры:

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1, \quad \epsilon_2 = 11.7,$$

$$\sigma^{(1)} = i \cdot 4.67 \cdot 10^{-4} \text{ См}, \quad \sigma^{(3)} = -i \cdot 2.15 \cdot 10^{-17} \text{ См} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}^{-2}, \quad A = 10^8 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}.$$

На рис. 2 можно видеть, что собственная мода в нелинейной режиме более локализована внутри волновода, чем соответствующая мода в линейном случае.

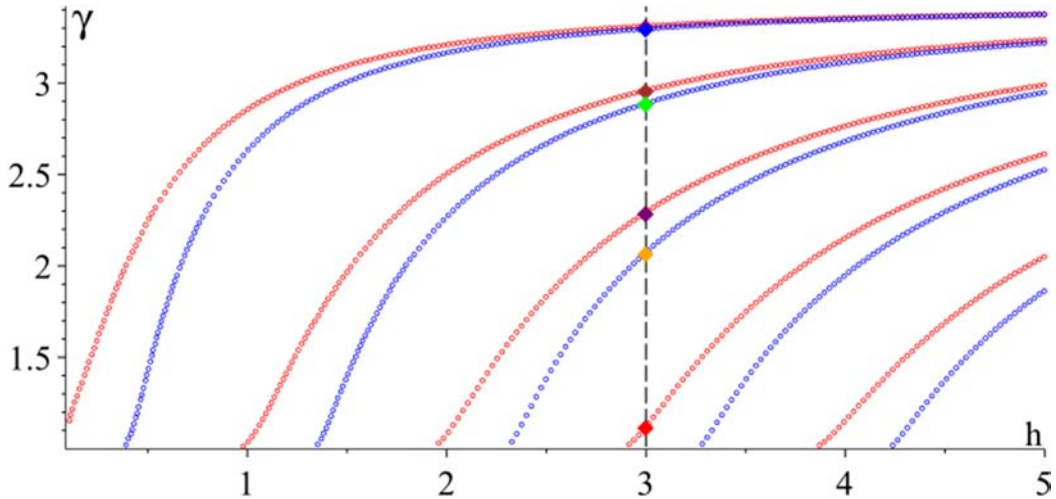


Рис. 1. Первые пять дисперсионных кривых задач $\mathcal{P}$ (синие кривые) и $\mathcal{P}_0$ (красные кривые). Ромбами отмечены решения $\hat{\gamma}_1 \approx 3.29$ (синий), $\hat{\gamma}_2 \approx 2.88$ (зеленый), $\hat{\gamma}_3 \approx 2.07$ (оранжевый) задачи $\mathcal{P}$ и $\tilde{\gamma}_1 \approx 3.3$ (красный), $\tilde{\gamma}_2 \approx 2.95$ (коричневый), $\tilde{\gamma}_3 \approx 2.29$ (фиолетовый) и $\tilde{\gamma}_4 \approx 1.11$ (красный) задачи $\mathcal{P}_0$

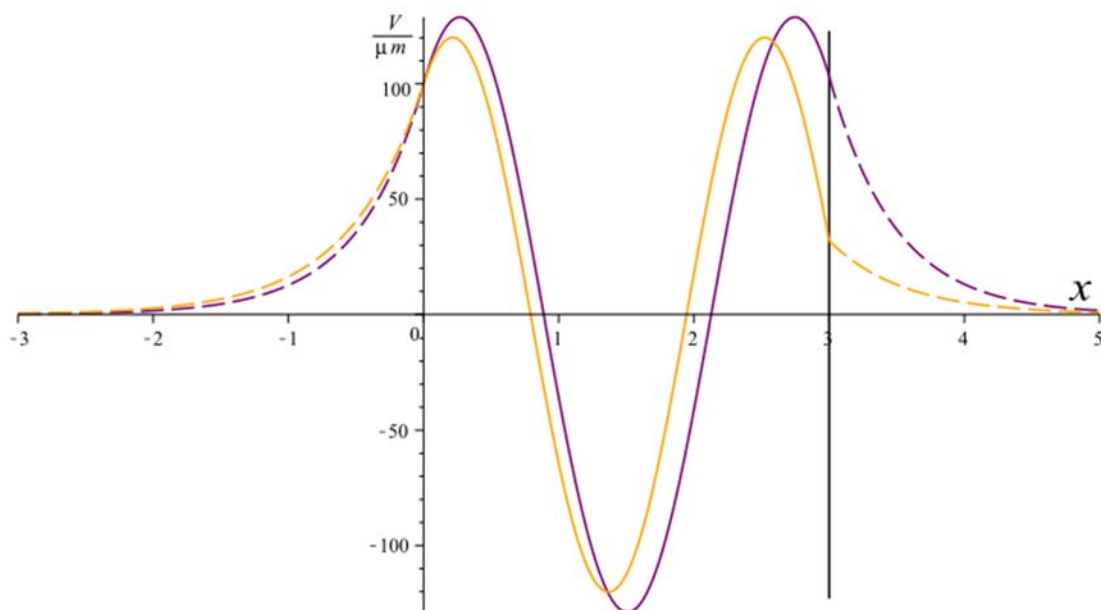


Рис. 2. Оранжевая кривая это собственная функция $u(x; \hat{\gamma}_3)$ задачи $\mathcal{P}$ для $\hat{\gamma}_3$, (оранжевый ромб на рис. 1). Фиолетовая кривая это собственная функция $v(x; \tilde{\gamma}_3)$ задачи $\mathcal{P}_0$, для $\tilde{\gamma}_3$ (фиолетовый ромб на рис. 1).

Заключение

Итак, в работе исследована задача о распространении ТЕ-волны в плоском диэлектрическом волноводе, на одну из поверхностей которого нанесен графен. Получены достаточные условия для существования собственных волн, поддерживаемых исследуемой волноведущей структурой. В работе также представлены численные результаты.

Список литературы

1. Svintsov D., Vyurkov V., Ryzhii V., Otsuji T. Voltage-controlled surface plasmon-polaritons in double graphene layer structures // J. Appl. Phys. 2013. Vol. 113. P. 053701.
2. Belonenko M. B., Lebedev N. G., Yanyushkina N. N. Solitons in a system of coupled graphene waveguides // Phys. Solid State. 2012. Vol. 54. P. 174–177.
3. Smirnov Yu., Tikhov S. The Nonlinear Eigenvalue Problem of Electromagnetic Wave Propagation in a Dielectric Layer Covered with Graphene // Photonics. 2023. Vol. 10, № 5. P. 523.

Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра

Гордей Валерьевич Чалышов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
19gordey99@gmail.com

Аннотация. Изучена нелинейная по спектральному параметру задача Штурма – Лиувилля на отрезке с краевыми условиями третьего рода. Для исследования задачи предложен новый математический аппарат: метод интегральной характеристической функции. Эта функция определяет собственные значения рассматриваемой задачи Штурма – Лиувилля. Исследование полученной функции позволяет доказать разрешимость изучаемой задачи, найти асимптотику собственных значений, получить теоремы сравнения, естественно ввести нумерацию собственных значений и нулей собственных функций и т.д.

Ключевые слова: задача Штурма – Лиувилля, асимптотика собственных значений, интегральная характеристическая функция, интегральное характеристическое уравнение

Solution of the Sturm – Liouville problem with boundary conditions depending on the spectral parameter

Gordey V. Chalyshev

Penza State University, Penza, Russia
19gordey99@gmail.com

Abstract. The Sturm-Liouville problem on an interval with boundary conditions of the third kind is studied. To study the problem, a new mathematical apparatus is proposed: the method of the integral characteristic function. The study of the resulting function allows one to prove the solvability of the problem under study, find the asymptotics of the eigenvalues, obtain comparison theorems, it is natural to introduce the numbering of the eigenvalues and zeros of the eigenfunctions, etc.

Keywords: the Sturm-Liouville problem, asymptotics of eigenvalues, integral characteristic function, integral characteristic equation

1. Постановка задачи и вводные замечания

Несмотря на тот факт, что такой задачей занимались многие исследователи [1, 2]. В работе используется математический аппарат, основанный на введении интегральной характеристической функции [3].

Пусть функции $P(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ положительны и непрерывны при $(x, \lambda) \in \bar{x} \times \Lambda$, а $\bar{x} = [0, a]$, $1 < a < \infty$ и $\Lambda = [b, +\infty)$, b – вещественная постоянная, и ещё P однократно непрерывно дифференцируемой по x при $x \in \bar{x}$.

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для уравнения

$$\left(P(x, \lambda) y'(x) \right)' + Q(x, \lambda) y(x) = 0, \quad x \in \bar{x} = [0, 1], \quad (1)$$

удовлетворяющую следующим условиям

$$\alpha_0(\lambda) y(0; \lambda) - y'(0; \lambda) = 0, \quad \alpha_1(\lambda) y(1; \lambda) + y'(1; \lambda) = 0,$$

где $\alpha_0(\lambda)$, $\alpha_1(\lambda) \in C(\Lambda)$ – вещественнозначные положительные функции.

Задачей $\mathcal{P}$ назовём задачу определения тех значений λ , для которых существует нетривиальное классическое решение $y \equiv y(x; \lambda)$ задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными

$$y(0; \lambda) = 1, \quad y'(0; \lambda) = \alpha_0(\lambda). \quad (2)$$

Отметим, что существуют непрерывные биекции $g_i : v_i \rightarrow x_i : \eta \rightarrow x$, где $v_0 = (-\infty, \eta(0; \lambda))$, $v_i = (-\infty; +\infty)$ при $i = 1, n-1$, $v_n = (\eta(1; \lambda), +\infty)$. Если $n = 0$, то $v_0 = (\eta(1; \lambda), \eta(0; \lambda))$. Используя биекции g_i определим функции $x \equiv g_i(\eta; \lambda)$, где $\eta \in v_i$, а $x \in x_i = (x_i, x_{i+1})$. Из рассуждений получаем следующее выражение

$$T_i(\lambda) \int \frac{dv}{\varsigma_i(v; \lambda)},$$

где $\varsigma_i(v, \lambda) = Q(q_i(v, \lambda); \lambda) + v^2 / P(q_i(v, \lambda); \lambda)$ $\varsigma_i(v; \lambda) = Q(g_i(v; \lambda); \lambda) + v^2 / P(g_i(v; \lambda); \lambda)$ при $v \in v_i$, $i = 0, n$. $v \in v_i$ $i = 0, n$

Далее определим функцию

$$\Phi(\lambda; n) \sum_{i=0}^n T_i(\lambda).$$

2. Основные результаты

Важнейшим результатом является **теорема 1**. Значение $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}$, если и только если существует целое число $\tilde{n} \geq 0$ такое, что $\lambda = \tilde{\lambda}$ при $n = \tilde{n}$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(\lambda; n) - 1 = 0. \quad (2)$$

Формула (2) представляет собой семейство (но не систему) уравнений при различных $n = 0, 1, \dots$. Уравнение (2) является интегральным

характеристическим уравнением задачи $\mathcal{P}$, а функция $\Phi(\lambda; n) - 1$ называется интегральной характеристической функцией этой задачи.

Результат, позволяющий исследовать разрешимость уравнения (2), даёт **утверждение 1**. Справедлива оценка

$$\pi \frac{\sqrt{p_-(\lambda)}}{\sqrt{q_+(\lambda)}} \leq T_i(\lambda) \leq \pi \frac{\sqrt{p_+(\lambda)}}{\sqrt{q_-(\lambda)}},$$

где $p_-(\lambda) = \min P(x, \lambda)$, $q_-(\lambda) = \min Q(x, \lambda)$, $p_+(\lambda) = \max P(x, \lambda)$, $q_+(\lambda) = \max Q(x, \lambda)$.

Из утверждения (1) и формулы функции $\Phi(\lambda; n)$ элементарно получаем **утверждение 2**. Имеет место оценка

$$\pi n \frac{\sqrt{p_-(\lambda)}}{\sqrt{q_+(\lambda)}} \leq \Phi(\lambda; n) \leq \pi(n+1) \frac{\sqrt{p_+(\lambda)}}{\sqrt{q_-(\lambda)}}.$$

Последние указанные оценки являются основным инструментом исследования разрешимости уравнения (2) и установления существования собственных значений задачи $\mathcal{P}$. Чтобы получить более содержательные результаты о разрешимости уравнения (2), а следовательно, и задачи $\mathcal{P}$, необходимо наложить дополнительные ограничения на функции P и Q . Будем предполагать, что справедливы оценки

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{p_-(\lambda)}{q_+(\lambda)} = O(\lambda^{-2\alpha_1}), \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{p_+(\lambda)}{q_-(\lambda)} = O(\lambda^{-2\alpha_2}),$$

где α_1, α_2 – вещественные постоянные и $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 0$.

Имеет место следующий важный результат **теорема 2**. Сформулированная задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений $\lambda = \tilde{\lambda}$ с точкой накопления на бесконечности; при этом для достаточно больших номеров n справедливы оценки $(\pi n)^{\alpha_2} - \Delta \leq \lambda_{n-1} \leq (\pi n)^{\alpha_1} + \Delta$, где $\Delta > 0$ – произвольная постоянная, и, в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$, оценки $\lambda_{n-1} = O(\pi^\alpha)$, где коэффициент при главном члене асимптотики равен π^α .

Список литературы

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1953. Т. 1. 348 с.
2. Mennicken R., Schmid H., Shkalikov A. A. On the eigenvalue accumulation of Sturm-Liouville problems depending nonlinearly on spectral parameter // Math. Nachr. 1998. Vol. 189. P. 157–170.
3. Валовик Д. В. Об интегральной характеристической функции задачи Штурма-Лиувилля // Математический сборник. 2020. Т. 211, № 11. С. 41–53.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

УДК 510.6

Функциональные графы и их применение

Алиса Саубьяновна Аюпова¹,
Юлия Фридриховна Захарова²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
²olegzakharov@rambler.ru

Аннотация. Приводятся основные понятия, связанные с псевдолесом. Рассматриваются максимальные ориентированные псевдолеса (функциональные графы). Основное внимание уделяется дискретной динамической системе, являющейся моделью регуляторного контура генной сети.

Ключевые слова: псевдолес, функциональный граф, структура деревьев, дискретная динамическая система

Function graphs and their applications

Alisya S. Ayupova¹, Yuliya F. Zakharova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia
²olegzakharov@rambler.ru

Abstract. The basic concepts related to pseudo-wood are given. The maximal oriented pseudo-trees (functional graphs) are considered. The main attention is paid to the discrete dynamic system, which is a model of the regulatory circuit of the gene network.

Keywords: pseudo-forest, functional graph, tree structure, discrete dynamic system

Одним из наиболее важных понятий, относящихся к структуре дискретных систем, является понятие графа. Это понятие, описывающее структуру связей между отдельными частями системы, в силу своей общности используется во многих математических моделях.

В основной бакалаврской работе рассматривается дискретная динамическая система, которая является одной из моделей регуляторного контура генной сети. Функционирование контура определяется сменой его состояний и полностью характеризуется структурой функционального графа заданного преобразования $A_{f,2}: F_2^n \rightarrow F_2^n$. Метки вершин задают уровень концентрации веществ (гены, белки и др.), сопоставля-

емых этим вершинам. В данной работе исследуется случай линейных функций. При этом для характеристики функционального графа с заданной линейной функцией в вершинах используются циклические коды и техника их порождения с помощью полиномов. Также описывается структура деревьев функционального графа и изучаются его контуры: неподвижные точки, длины контуров. Рассматривается некоторое обобщение преобразования $A_{f,2}$.

Ориентированные псевдолеса и отображения в себя в некотором смысле математически эквивалентны. Любое отображение f на множестве X на себя можно интерпретировать как определение ориентированного псевдолеса, который имеет дугу из x в y , когда $f(x) = y$. Полученный ориентированный псевдолес максимален и может включать петли, если для некоторых x $f(x) = x$. Исключение петель приводит к не максимальным псевдолесам. В обратном направлении любой максимальный ориентированный псевдолес определяет отображение f , для которой $f(x)$ равно конечной вершине дуги, исходящей из x , и любой не максимальный ориентированный псевдолес можно сделать максимальным путём добавления петель и конвертирования в функцию тем же способом. По этой причине максимальные ориентированные псевдолеса иногда называются **функциональными графами**.

Функциональным графом $G_{f,q}$ называется ориентированный граф, вершинами которого являются элементы F_q^n , причем дуга из вершины $\tilde{v}$ идет в вершину $\tilde{u}$ тогда и только тогда, когда $A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$. Известно, что функциональный граф любого преобразования конечного множества состоит из нескольких компонент связности. Каждая компонента содержит единственный контур. Некоторые вершины контура являются корнями деревьев, все дуги которых ориентированы к корню.

Представление функции в виде функционального графа даёт удобный язык описания свойств, которые непросто описать с точки зрения теории функций. Такая техника особенно полезна для задач, использующих, которые соответствуют путям в теории графов. Задача прослеживания путей в функциональном графе для нахождения в нём цикла, имеет приложения в криптографии и как часть ро-алгоритма Полларда для факторизации целых чисел и как метод нахождения конфликтов в криптографических хеш-функциях. Мартин, и Вольфрам исследовали псевдолеса, моделирующие динамику клеточных автоматов. Это функциональные графы, они называли их диаграммами переходов состояний, имеют по одной вершине для каждой возможной конфигурации, в которой могут находиться ячейки клеточного автомата, а дуги соединяют каждую конфигурацию, которая из неё получается согласно правилам клеточного автомата. Можно получить свойства автомата из структуры

этих диаграмм, такие как число компонент, длину конечных циклов, глубину деревьев, соединяющих неконечные состояния этих циклов, или симметрии диаграммы.

В работе исследуется структура функционального графа в случае, когда $q = 2$ (то есть действия происходят над полем F_2), все функции f_i равны между собой и линейны и отображение $A_{f,2}$ действует следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{f,2}(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) &= (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}), \\ u_i &= v_{i-1} + v_i + v_{i+1}, \quad i=0,1,\dots,n-1, \\ \text{где } v_{-1} &= v_{n-1}, \quad v_n = v_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Опишем структуру деревьев в функциональном графе. Для этого воспользуемся основными утверждениями и предложениями работы [1].

Линейное подпространство C векторного пространства F_2^n называется **циклическим кодом длины n** над F_2^n если из $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in C$ следует $(v_1, \dots, v_{n-1}, v_0) \in C$.

Каждому набору $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ из F_2^n поставим в соответствие многочлен $v(x) = v_0 + v_1x + \dots + v_{n-1}x^{n-1}$ из кольца многочленов $F_2[x]$ над полем F_2 . Известно, что при таком соответствии действие отображения $A_{f,2}(\tilde{v}) = \tilde{u}$, определяемое линейной рекуррентностью (1), можно записать в следующем виде.

Предложение 1. $A_{f,2}(\tilde{v}) = \tilde{u}$ тогда и только тогда, когда

$$v(x)(x^{n-1} + x + 1) \equiv u(x) \pmod{x^n - 1}.$$

Теперь в качестве состояний системы будем рассматривать элементы фактор-кольца $F_2[x]/(x^n - 1)$, а изменение состояния определяется умножением в этом фактор-кольце на многочлен

$$A(x) = x^{n-1} + x + 1.$$

Такую динамическую систему обозначим через $(n, 2, A(x))$ и далее будем называть **моделью**.

Утверждение 1. Если $A(x)$ и $x^n - 1$ взаимно просты в кольце $F_2[x]$, то отображение $A_{f,2}$ обратимо и функциональный граф $G_{f,2}$ является дизъюнктивным объединением простых контуров.

Предложение 2. При n не кратном 3 отображение $A_{f,2}$ обратимо и функциональный граф $G_{f,2}$ является дизъюнктивным объединением простых контуров.

На рис. 1 изображен функциональный граф модели $(5, 2, A(x))$, который представляет из себя дизъюнктивное объединение простых

контуров. Здесь двоичные наборы длины 5, соответствующие вершинам, записаны их десятичными представлениями.

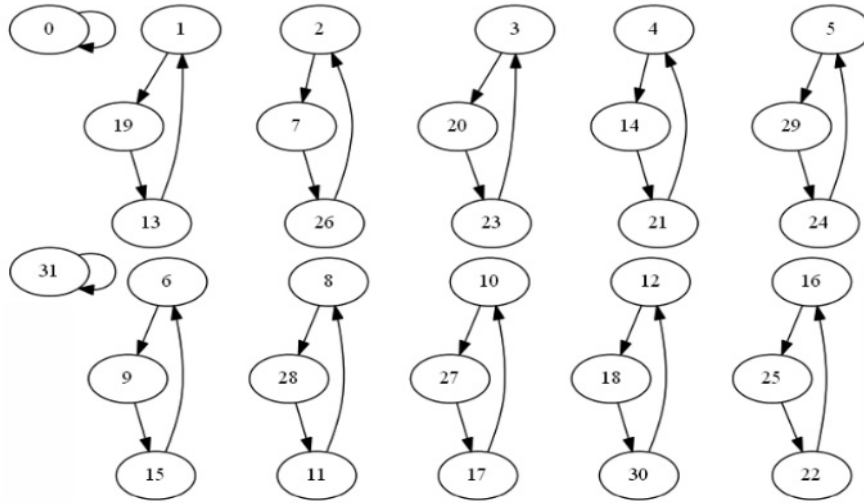


Рис. 1. Функциональный граф $G_{f,2}$ при $n = 5$

Пусть $(A(x), x^n - 1) \neq 1$, т.е. n кратно 3 по предложению 2. Рассмотрим последовательность циклических кодов $C_0 = F_2[x]/(x^n - 1)$, $C_1, C_2, \dots, C_t$, таких, что код C_i имеет порождающий и проверочный многочлены $g_i(x)$ и $h_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, t$, соответственно, где

$$g_1(x) = (A(x), x^n - 1), \quad h_1(x) = (x^n - 1) / g_1(x),$$

$$g_i(x) = g_{i-1}(x)(g_1(x), h_{i-1}(x)), \quad h_i(x) = (x^n - 1) / g_i(x), \quad i = 2, 3, \dots, t,$$

и t – такое минимальное число, что $(g_1(x), h_t(x)) = 1$.

Пусть $S_i = C_i \setminus C_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, t-1$, и $S_t = C_t$.

Утверждение 2. В функциональном графе $G_{f,2}$ вершины, принадлежащие контурам, образуют множество S_t . Множество вершин, принадлежащих деревьям, разбивается на t уровней $S_0, S_1, \dots, S_{t-1}$, таких, что S_0 множество листьев, а вершины из S_i находятся на расстоянии i от вершин из S_0 , $1 \leq i \leq t-1$.

Теорема 1. При $n = 3 \cdot 2^k(2m+1)$, где $k, m \geq 0$, в функциональном графе $G_{f,2}$ множество вершин, принадлежащих деревьям, разбивается на 2^k уровней, причем каждая вершина дерева, кроме листьев, имеет ровно четырех предков.

На рис. 2 изображено дерево, притягиваемое вершиной $\tilde{v} = (0, 0, \dots, 0)$, в функциональном графе $G_{f,2}$ при $n = 6$. Двоичные наборы длины 6, соответствующие вершинам, записаны их десятичными представлениями.

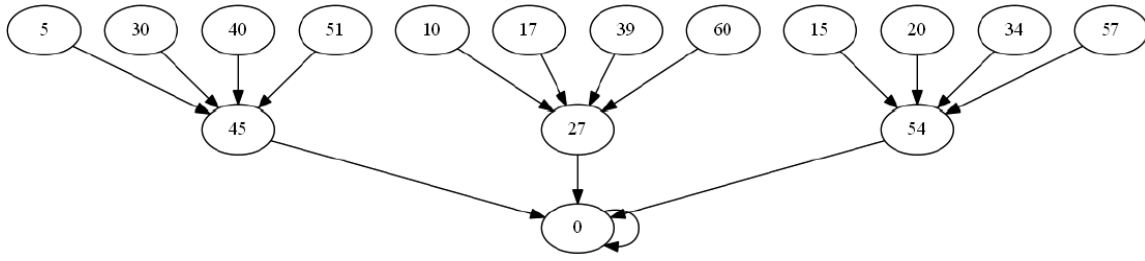


Рис. 2. Дерево, притягиваемое вершиной $\tilde{v} = (0, 0, \dots, 0)$,
в функциональном графе $G_{f,2}$ при $n = 6$

Рассмотрим неподвижные точки и длины контуров в функциональном графе $G_{f,2}$.

Утверждение 3. Неподвижные точки функционального графа $G_{f,2}$ образуют циклический код с проверочным многочленом $(A(x) - 1, x^n - 1)$. Если степень этого многочлена равна r , то число неподвижных точек равно 2^r .

Предложение 3. При четном n функциональный граф $G_{f,2}$ содержит 4 неподвижные точки, в противном случае – 2.

Утверждение 4. Для любого целого положительного l все вершины функционального графа, принадлежащие контурам длины, делящей l , образуют циклический код с проверочным многочленом $(A^l(x) - 1, x^n - 1)$.

Утверждение 5. Если наибольшая длина контура функционального графа модели $(n, 2, A(x))$ равна l и $h_t(x)$ является порождающим многочленом циклического кода, образованного вершинами всех контуров, то максимальная длина контура функционального графа модели $(n, 2, A(x))$ не изменится тогда и только тогда, когда $h_t^2(x)$ делит $A^l(x) - 1$. В противном случае наибольшая длина контура удвоится.

Теорема 2. Если $n = 2^k(2m + 1)$, где $k, m \geq 0$, то все длины контуров функционального графа $G_{f,2}$ являются делителями $2^k(2^8 - 1)$, где

$$s = \min\{j : j > 0, 2^j \equiv 1 \pmod{2m+1} \text{ или } 2^j \equiv -1 \pmod{2m+1}\}.$$

Утверждение 6. Если в модели $(n, 2, A(x))$ наибольшая длина l контура четна, то в модели $(2n, 2, A(x))$ наибольшая длина контура равна $2l$.

Теорема 3. Пусть в модели $(n, 2, A(x))$ наибольшая длина контура равна l , тогда в модели $(2n, 2, A(x))$ наибольшая длина контура не изменится, если $n \in \{1, 3\}$, в противном случае она удвоится.

Утверждение 7. Наибольшая длина контура в функциональном графе равна минимальному l , для которого

$$(A^l(x) - 1, x^n - 1) = h_t(x).$$

Следствие 1. Если $n = 2^k(2^m \pm 1)$, $k \geq 0$, $m > 2$, то наибольшая длина контура в $G_{f,2}$ равна $2^k(2^m - 1)$.

Предложение 4. Если $n \neq 3$ – простое число, то все контуры в $G_{f,2}$, кроме двух неподвижных точек, имеют одинаковую длину.

Список литературы

1. Корниенко А. С. Структура функциональных графов для циркулянтов с линейными булевыми функциями в вершинах. Новосибирск : Институт математики СО РАН, 2014. 12 с.
2. Гусева А. И., Тихомирова А. Н. Дискретная математика для информатиков и экономистов : учеб. пособие. М. : НИЯУ МИФИ, 2010. 280 с.
3. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М. : Мир, 1988. Т. 1. 430 с.
4. Харари Ф. Теория графов. М. : УРСС, 2003. 300 с.
5. ПОИВС : сайт. URL: <http://poiivs.tsput.ru/ru/Math/Geometry/CombinatorialGeometry/TheoryOfMatroids/Pseudo> (дата обращения: 27.04.2023).

Элементы теории канцерогенеза
О. А. Барсукова и В. Е. Фортова

Михаил Иванович Гринцов¹,
Виктория Михайловна Гринцова²,
Наталья Сергеевна Бофанова³,
Юлия Александровна Князькина⁴

^{1,3,4}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²Дорожная больница, Москва, Россия

¹grintsovM@mail.ru

Аннотация. Теория канцерогенеза рассматривается с точки зрения астрономического явления под названием «покрытие звезд астероидами или планетами». Клинические наблюдения за здоровыми и талантливыми историческими личностями и сравнение их с детьми, у которых диагностирована онко- и онкогематопатология, показали, что эти противоположные в клиническом отношении группы лиц подчиняются определенным законам астрофизики и эфемеридной механики. Появление на свет здоровых и талантливых проходило при условии, что траектория вторжения энергии галактических космических лучей была перекрыта одним из газовых или группой планет газовых гигантов и скальных планет в моменты времени зачатия и рождения. Появление на свет детей с онко- и онкогематопатологией происходило, когда источник не был перекрыт и энергия галактических космических лучей беспрепятственно достигала поверхности Земли и геномов гамет родителей или их зиготы до момента плацентации. Моделирование рождения только здоровых и только талантливых можно упростить, используя для этого законы астрономического явления под названием «покрытие звезд астероидами или планетами». С этой целью предложена технология «редактирования не генома, а эфемерид».

Ключевые слова: здоровые, талантливые, онкология младенцев и детей, эфемериды, теория канцерогенеза О. Барсукова и В. Фортова

Elements of the theory of carcinogenesis
O. A. Barsukov and V. E. Fortov

Mihail I. Grintsov¹, Viktoria M. Grintsova²,
Natalia S. Bofanova³, Yulia A. Knyazkina⁴

^{1,3,4}Penza State University, Penza, Russia

²Road Hospital, Moscow, Russia

¹grintsovM@mail.ru

Abstract. The theory of carcinogenesis is considered from the point of view of an astronomical phenomenon called "covering stars with asteroids or planets". Clinical observations of healthy and historically talented individuals and their comparison with children diagnosed with oncological and oncogematopathology have shown that these clinically opposite groups of individuals obey certain laws of astrophysics and ephemeris mechanics. It turned out that the technology of modeling the birth of healthy and talented people is much simpler than the appearance of children who are diagnosed with oncological and oncogematopathology in early childhood. Preventing the birth of children with oncopathology by modeling the birth of only healthy and only talented ones is much easier than analyzing cases of oncopathology and its prevention. For this purpose, the technology of "editing not the genome, but ephemerides" in the fields of the ecliptic is proposed.

Keywords: healthy, talented, oncology of infants and children, ephemerides, theory of carcinogenesis O. Barsukov and V. Fortova

Состояние проблемы. Генетике 120 лет. Проблемы онкопатологии и врождённых пороков развития до сих пор не решены. Гипотеза/теория канцерогенеза О. А. Барсукова и В. Е. Фортова, основанная на идее о том, что источником ионизирующей энергии, вызывающей мутации является центр Нашей Галактики в созвездии Стрельца. Потоки колиминированных пучков энергии большой плотности, достигающих поверхности Земли, способны вызывать мутации генного аппарата. В тех случаях, когда потоки лучей чем-то перекрываются и поверхности Земли не достигают, на Земле могут рождаться здоровые и талантливые дети. В тех случаях, когда га пути вторжения энергии галактических космических лучей (ГКЛ) расположены планеты Солнечной системы, то энергия ГКЛ Земли и генома гамет и/или зиготы не достигает и на свет появляются здоровые и талантливые дети. Однако эта теория не получила окончательного «клинического подтверждения» из-за недостаточного «клинического наполнения».

Цель исследования. Дополнить гипотезу О. А. Барсукова и В. Е. Фортова клиническими наблюдениями с целью подтверждения или опровержения её достоверности. **Задачи исследования.** 1. Изучить моменты времени зачатия и рождения группы здоровых и талантливых исторических лиц; 2. изучить моменты времени зачатия и рождения младенцев и детей младшего возраста, у которых диагностирована онко- и онкогематопатология; 3. изучить контрольную группу лиц студентов университета; 4. сравнить изученные группы и выяснить, почему одни появлялись на свет здоровыми и талантливыми, а другие – с различными вариантами онкопатологии? **Методы изучения.** Принято решение отказаться от декартовой системы координат и изучать проблему в эклиптикальной /гринвичской системе координат. **Материал исследования.** Из открытых источников интернета отобрано 280 исторических лиц, которые в обществах признаны талантливыми или гениальными

(нобелевские лауреаты, академики РАН и СССР, ведущие музыканты, писатели, политики, военные. Из архивных материалов онкологических лечебных учреждений г. Пензы и г. Санкт-Петербурга в сплошной выборке изучено 260 случаев онко- и онкогематопатологии у младенцев и детей раннего возраста. Контрольную группу составили порядка 180 успевающих студентов университета.

В основу проведения исследования положены научные факты и гипотезы. Известно, что существует такое астрономическое явление как «покрытие звёзд астероидами или планетами». Физический смысл этого астрономического явления состоит в периодичности мерцания света /поток энергии от далёкого источника (звезды, квазара), вызванного покрытием астероидом /планетой /группой планет, проходящих перед этой звездой /квазаром. Элементарные законы астрофизики и эфемеридной механики позволяют точно вычислять детали этого явления. Стрелец самая красивая часть Млечного Пути. Обилие объектов в Стрельце объясняется тем, что в проекции Стрельца примерно на расстоянии 30 000 световых лет, расположен центр Нашей Галактики, из которого исходят галактические космические лучи (ГКЛ) высоких энергий. Астрономическое явление «покрытие звёзд астероидом или планетой» имеет не только физические, но и клинические проявления. Согласно гипотезе академика РАН В. Е. Фортова и д.ф-м.н. проф. О. А. Барсукова, из центра Нашей Галактики генерируются космические струи – радиационные ударные волны молекулярных облаков. Мощные (порядка 10^{39} Ватт) протяжённые и хорошо сколлиминированные (угол расходимости даже меньше $<1^\circ$). *Эти потоки/струи являются астрофизическими объектами и сопровождаются электромагнитным излучением широкого спектра – от радиоизлучения с частотой порядка 10^8 Гц до сверхжёсткого гамма-излучения с частотой 10^{27} Гц.* В. Е. Фортов и О. А. Барсуков утверждают, что *высококоллиминированные струи, пучки заряженных частиц, ускоряемых до ультра высоких энергий рождаются в центре Нашей Галактики в созвездии Стрельца (звезда Стрелец А, способны преодолевать магнитный экран Земли – магнитосферу и атмосферу, и, достигнув биоты Земли, вызывать генетические изменения в виде онкологических клинических эффектов».* Теория предполагает, что мутагенная энергия этих потоков происходит из центра только Нашей Галактики. Предполагается, что энергетическими потоками высоких энергий из иных Галактик можно пренебрегать ввиду редкости таких потоков энергий из иных Галактик. Мутагенными эффектами обладают струи/ пучки /потоки энергии только Нашей Галактики. Потоки энергии из других Галактик, достигших Земли, заметного клинического эффекта не вызывают. Получается, что энергия Нашей Галактики является не только источником жизни на Земле, но и «ликвидатором» жизни и/или причиной различных

видов патологии. Разрушение биоты Земли происходит по законам астрономического явления под названием «покрытие звёзд астероидами или планетами».

▪ *Летальная доза может быть набрана за 30 минут и менее». Мутагенные эффекты могут возникать и при низких уровнях облучения. (Цит. В. Е. Фортова, с. 398).* Составной частью теории является физический эффект мерцаний, рождающийся в момент «покрытия звёзды» Стрелец А астероидами или планетами Солнечной системы.

▪ Из астрономического явления «ПОКРЫТИЯ ЗВЁЗД АСТЕРОИДАМИ ИЛИ ПЛАНЕТОЙ» – следует вывод о том, что для того, чтобы на Земле на свет появлялись только здоровые и талантливые дети, необходимо так «встроить золотой срок пребывания ребёнка в лоне матери в 273 сутки», чтобы ни момент времени зачатия, ни момент времени появления на свет не происходил бы при «открытых воротах» вторжения энергии ГКЛ. Открытые ворота вторжения высоких плотностей энергии ГКЛ точно соответствуют астрономическому моменту времени, когда путь вторжения энергии ГКЛ ничем не перекрыт, не создан «защитный экран» из эфемерид. Планеты постоянно меняющих свои координаты на полях эклиптики.

▪ Если Солнце или группа планет (вместе с Солнцем), располагаясь на пути траектории вторжения энергии ГКЛ образуют конфигурацию экрана/щита, препятствующего проникновению энергии струй/ потоков из центра нашей Галактики к поверхности Земли – к биоте, то на свет появляются здоровые и талантливые дети.

▪ Если на пути вторжения энергии струй ГКЛ не успел образоваться экран/ преграда для вторжения струй этой энергии, то на свет могут появляться дети с пороками развития, одним из вариантов которых следует считать онкопатологию.

▪ Одной из технологий решения обратных задач репродуктологии и онкологии может быть технология моделирования построения конфигурации планет на полях эклиптики в каждый момент астрономического времени.

▪ Так же, как К. Ренген доказал существование X-лучей, которые были названы «рентгеновыми лучами», так и О. А. Барсуков и В. Е. Фортов доказали существование лучей с высокими плотностями энергии в космосе, указав источник их образования (См. [8], с. 605–697);

▪ О. А. Барсуков: основной вклад в дозу облучения на малых высотах дает ионизирующий компонент космических лучей» (см. [7], с. 137–141).

▪ *Исследования в области физики высоких энергий позволяют утверждать, что основные законы, управляющие движением и взаимодействием элементарных частиц, очень просты. Они основаны на симметрии и принципе, «что всё, что не противоречит симметрии,*

разрешено и может и должно происходить». В полной мере это реализуется в гравитационном, электромагнитном, слабом и сильном взаимодействии частиц ([7], С. 291–403. Конец цитирования).

- В случаях вспышек на Солнце и выброса корональной массы летальная /раковая доза может быть набрана за 30 (тридцать минут) и менее. (В. Е. Фортов). «Генетические изменения и онкологические эффекты могут возникать уже при низких уровнях облучения. В. Е. Фортов приводит расчётные коэффициенты риска возникновения злокачественных изменений в клетках молочной железы при долгосрочном воздействии тяжёлых заряженных частиц. Для электронных приборов и для живых организмов определяющим фактором риска является доза.

- Доза обычно определяется как макроскопически поглощённая энергия в единице массы ($1 \text{ Гр} = 1 \text{ Дж/кг}$), однако более важным является локальное распределение дозы вдоль индивидуального трека частицы, которое достигает многих килогрей? в центре трека. Именно такой клинически непропорционально большой отклик наблюдается во многих биологических системах при сравнительно низких макроскопических дозах. Это явление роста радиобиологической эффективности (РБЭ) связывают с множественными повреждениями обеих нитей ДНК в окрестностях трека тяжёлой заряженной частицы.

- Учёт РБЭ и явления фрагментации тяжёлой релятивистской частицы (ТРЧ) в ходе вторжения в клетки обуславливает усиленную трансформацию клеток при облучении ионами железа, несмотря на низкую, по сравнению с протонами, интенсивность. Для понимания механизмов трека является изучение переходных процессов, вызванных прохождением быстрой частицы через вещество...

- Тяжёлые ионы выделяют свою энергию в течение короткого промежутка времени в малом объёме, обеспечивая пороговое изменение структуры твёрдого вещества. Комбинация высокого давления и быстрого энерговыделения ионного пучка в локальной области вызывает фазовые превращения, невозможные при приложении только одного давления. (с. 400–403).

- Джеты энергии, рождающиеся в недрах Галактики М87, состоят из быстро движущихся частиц и имеют структуру неоднородностей (узлов). В. Е. Фортов показал «механизмы космических влияний на земные объекты» – на гены. К. Кольцов и Э. Шредингер [13] пришли к выводам о том, что разворачивание на 5–9-й неделе развития мозга происходит не de-novo, а «по программе, заложенной в зиготе до момента времени плацентации.

Результаты исследования. 1. Между группой «здоровых и талантливых» исторических лиц установлена достоверная зависимость между астрономическими моментами времени рождения и их зачатия

с образованием на эклиптике конфигурации эфемерид/планет в по типу «закрытых ворот вторжения высоких плотностей энергии» галактических космических лучей сквозь магнитосферу и атмосферу Земли и в связи с этим невозможность разрушить геном гамет родителей, геном зиготы до момента плацентации. Другими словами: геномы гамет родителей и вновь образованной зиготы не были разрушены по той причине, что в момент свободного полёта гамет до момента времени их плацентации эклиптикальное окно вторжения энергии галактических космических лучей было закрыто группами планет (и Солнцем). Т.е., происходило «покрытие источника излучения» планетами, что полностью соответствует астрономическому явлению «покрытие звёзд астероидами или планетами».

2. Между группой «младенцев и детей раннего возраста, у которых установлены онкологические диагнозы, установлена достоверная зависимость между астрономическими моментами времени рождения и их зачатия с образованием в эклиптике конфигурации «открытых ворот вторжения энергии» галактических космических лучей сквозь магнитосферу и атмосферу Земли, достигая биоты. В таких случаях возникала возможность разрушения генома гамет родителей, генома зиготы до момента плацентации. Другими словами: геномы гамет родителей и вновь образованной зиготы могли быть разрушены по той причине, что в момент свободного полёта их до момента времени плацентации эклиптическое окно вторжения энергии галактических космических лучей было открытым. Т.е., астрономическое явление под названием «покрытие звёзд астероидами или планетами» не происходило. Указанные клинические наблюдения позволяют сделать заключение, что появление на свет как здоровых и талантливых, так и детей с онкопатологией, полностью соответствуют «теории канцерогенеза О. А. Барсукова и В. Е. Фортова».

3. Контрольная группа «успевающих студентов университета» является гетерогенной: одни талантливые студенты соответствуют теории О. А. Барсукова и В. Е. Фортова в том плане, что они являются талантливыми, и, предположительно, не заболеют онкопатологией. У некоторых студентов имеются указания на то, что они могут заболеть онкопатологией.

4. Достоверные связи между рождением (и зачатием) здоровых и талантливых с конфигурацией планет на эклиптике позволяет клиническому генетику и репродуктологу принимать решения о продлении рода «только здоровыми и только талантливыми» на основании визуального просмотра/анализа конфигураций эфемерид.

5. Углублённый астрофизический анализ моментов времени зачатия и рождения детей, которым после рождения устанавливался диагноз онкопатологии довольно трудоёмкий и сложный. Проще, как нам

представляется, рекомендовать «правила зачатия и рождения, которые установлены у здоровых и талантливых», чем «копаться» в очень сложных энергетических конфигурациях и их взаимоотношениях детей, у которых установлен диагноз онкопатологии.

6. Используя технологию «редактирования не генома, а эфемерид» представляется возможным формировать здоровое и талантливое поколение в обществе, минуя анализ неисчислимого числа нозологических форм онкопатологии и их разновидностей (рис. 1, 2).

Астрофизическая ситуация на 2 мая 2035 г. на 16:30 на координаты Москвы.
Плацидус
Топоцентрическая

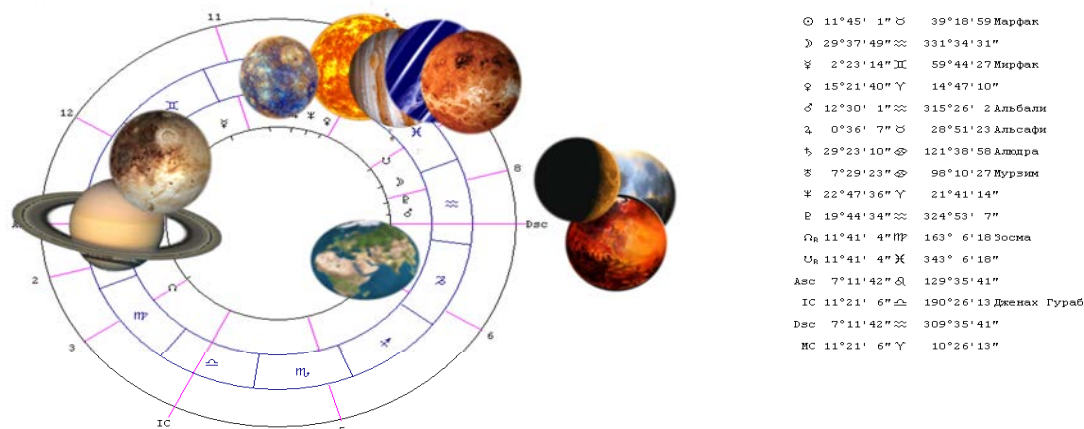


Рис. 1. Космограмма зачатия. Если 2 мая 2035 г. на координатах г. Москва произойдёт зачатие детей приблизительно от 16:0 до 18:0, то $\approx$ 2 февраля 2036 г. на свет появятся здоровые и талантливые дети.

Обоснование: Траектория входа высокоэнергетических галактических лучей в тот момент времени будет перекрыта группой газовых гигантов и скальной Венерой. Это означает, что Солнце, Юпитер, Нептун и Венера образовали «щит», или закрыли «ворота вторжения высоких плотностей энергии ГКЛ. Геном гамет родителей и зиготы не может быть разрушен. Траектория влёта высоких плотностей энергии на пространства Солнечной системы указана символами MC=из Северного полюса, из центра Нашей Галактики

7. В нашем исследовании получает обоснование ранее труднообъяснимая необходимость проводить изучение момента времени как рождения, так и зачатия. На стр. 416 труда Е. Д. Свердлова [14] приводится аргументация о необходимости «двух-ударной мутации» для возникновения рака. Первая мутация не приводит к раку, возникает только подготовленность. Вторая мутация или потеря гена приводит к раку.

8. Предполагаем, что если в ближайшее время общество сможет наладить процесс изучения только здоровых и только талантливых, что намного проще и дешевле, чем изучение неисчислимого числа болезней, то можно будет отказаться от сложных и затратных технологий изучения неисчислимого количества патологических состояний.

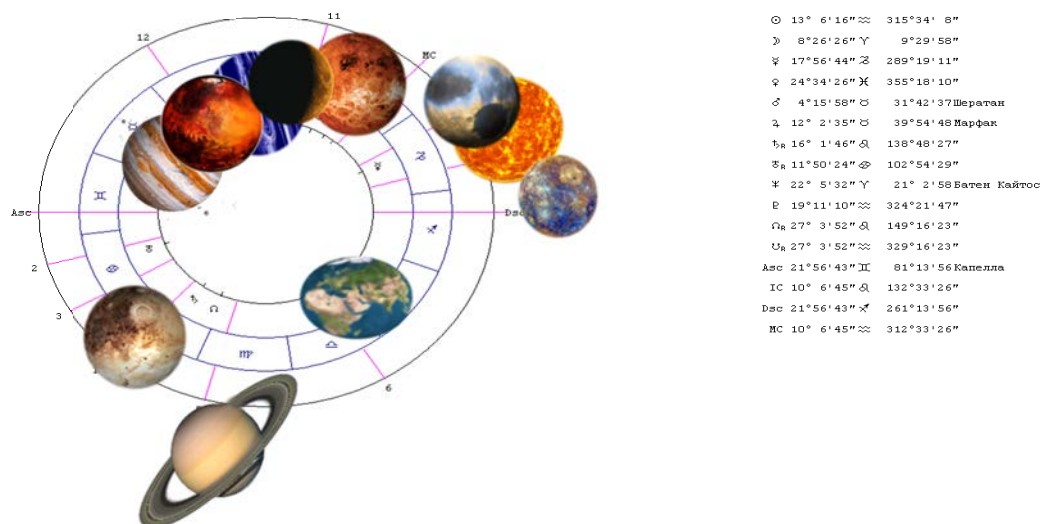


Рис. 2. Космограмма рождения. Если 2 мая 2035 г. на координатах Москвы случатся зачатия в период от $\approx 16:30$ до $18:30$, то ≈ 2 февраля 2036 г. на свет появятся здоровые и талантливые дети. Обоснование: Траектория входа высокоэнергетических галактических лучей в момент времени рождения перекрыта Солнцем и Плутоном, которые образуют «щит», или закроют «ворота вторжения» энергии галактических космических лучей

Заключение. 1. Теория мутагенеза / онкогенеза О. А. Барсукова и В. Е. Фортова утверждает, что одной из наиболее важных причин мутагенеза генома у живых организмов на Земле являются не земные, а космические факторы. 2. Клинические эффекты астрономического явления под названием «покрытие звёзд астероидами и/или планетами» полностью соответствуют теории канцерогенеза Барсукова и Фортова. 3. Если Солнце или группа планет (вместе с Солнцем), располагаясь на пути траектории вторжения ГКЛ образуют конфигурацию экрана/щита, препятствующего проникновению энергии струй из центра нашей Галактики к поверхности Земли – к биоте, то на свет появляются здоровые и талантливые дети. 4. Если на пути вторжения энергии струй ГКЛ отсутствует преграда /экран для вторжения струй энергии, то на свет могут появляться дети с различными пороками развития, в том числе и различными видами онкопатологии. 5. Историческим примером регуляции репродуктивного поведения населения является опыт великого Китая, в котором ради предотвращения «неконтролируемого демографического взрыва» проводился государственный контроль над рождаемостью: каждой чете выдавалось разрешение на одну беременность. Что – по сути – являлось «лицензией» на одну беременность. Подозреваем, что первым государством на Земле, в котором будет внедрена «технология редактирования не генома, а эфемерид» с целью появления на свет только здоровых и только талантливых, будет Великий Китай с его успешным опытом регулировки репродуктивного поведения населения.

С высокой сознательностью его населения, верой в то, что его руководство предлагает населению «только самые лучшие и безопасные» социальные технологии. 6. Общество, которое не способно обеспечить рождение только здоровых и только талантливых, не способно научиться предотвращать появление на свет детей с пороками развития – обречено.

Список литературы

1. Исакова П. Б. Особенности структуры течения в магнитных катаклизмических переменных : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2018.
2. Каприн А. Рак больше не приговор // В мире науки. 2022. № 9/10. С. 4–13.
3. Драпкина О. Первый эшелон в борьбе с онкологическими заболеваниями // В мире науки. 2022. № 9/10. С. 14–17.
4. Чехонин В. Знать – значит выжить // В мире науки. 2022. № 9/10. С. 19–23.
5. Пушкарь Д. Онко-урология: история успеха // В мире науки. 2022. № 9/10. С. 30–37.
6. Аптекарев А. И. В поисках двойника // В мире науки. 2022. № 1-2.
7. Барсуков О. А. Основы физики атомного ядра. Ядерные технологии. М. : Физматлит, 2011. 559 с.
8. Фортон В. Е. Физика высоких плотностей энергии. М. : Физматлит, 2013. 710 с.
9. Овсянников В. А. Энергетическая модель канцерогенеза // Вопросы онкологии. 2005. Т. 51. № 1.
10. Gauquelin M. Astrology and science P. Davies, 1970.
11. Гринцов М. И., Гринцова В. М. Врождённые пороки развития у детей и подростков. Пенза, 2021. 145 с.
12. Инге-Вечтомов С. Г. Экологическая генетика. Что это такое? // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 2. С. 59–65.
13. Кольцов Н. К. Очерки, статьи, документы. М. : Научный мир, 2021. 598 с.
14. Свердлов Е. Д. Взгляд на жизнь через окно генома. М. : Наука, 2019. Т. 2. 406 с.
15. Орлов И. О. Биологические риски как потенциальный фактор космических угроз // Поиск. 2019. № 3-4. С. 1545–1546.
16. Фомин Г. С., Фомина О. Н. Воздух. М., 2002. 422 с.
17. Федоренко Б. С. Радиобиологические эффекты корпускулярных излучений. М. : Наука, 2006. 189 с.

На пути к надежному сопоставлению сущностей: кейсы исследований фармацевтических наборов данных

**Аделина Сергеевна Гамаюнова¹, Алексей Витальевич Жуков²,
Никита Викторович Русецкий³, Денис Николаевич Сидоров⁴**

^{1,2,3,4} Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Иркутск, Россия

¹theademari@gmail.com, ²zhukovalex13@gmail.com, ⁴contact.dns@gmail.com

Аннотация. Сопоставление сущностей является одной из основных проблем, определяющих успех развития электронной торговли. Оно позволяет определить, относятся ли две записи сущностей к одной и той же реальной сущности, т.е. позволяет сопоставлять предложения о продуктах из разных интернет-магазинов. Представлен обзор методов и систем сопоставления на основе атрибутов, использующих современные подходы. Также описывается новый подход к разработке стратегии для улучшения результатов сопоставления продуктов, объединяющий нечеткую логику и машинное обучение, а также использование взвешенного косинусного расстояния для надежного сопоставления записей. Эффективность предложенной системы демонстрируется на фармацевтических базах данных, предоставленных местной компанией.

Ключевые слова: сопоставление сущностей, электронная торговля, сопоставление на основе атрибутов, нечеткая логика, машинное обучение, взвешенное косинусное расстояние, фармацевтические базы данных

Towards robust entity matching: cases studies for the pharmaceutical datasets

**Adelina S. Gamayunova¹, Aleksei V. Zhukov²,
Nikita V. Rusetskii³, Denis N. Sidorov⁴**

^{1,2,3,4} Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

¹theademari@gmail.com, ²zhukovalex13@gmail.com, ⁴contact.dns@gmail.com

Abstract. Entity matching is one of the main challenges for the success of e-commerce development. It makes it possible to identify whether two entity records refer to the same real-world entity, i.e. enables the match product offers from different web shops. The overview of the state of the art methods for attribute-based matching methods and systems is given. The novel approach to develop the promising strategy to improve product matching results is reported combining the fuzzy logic and machine learning and using the weighted cosine distance for robust entry matching. The efficiency of the proposed system is demonstrated on the pharmaceutical databases provided by the local aggregator.

Keywords: entity matching, e-commerce, attribute-based matching, fuzzy logic, machine learning, weighted cosine distance, pharmaceutical databases

Введение

В медицинской сфере часто возникает потребность в сопоставлении номенклатур медицинских товаров из разных источников, таких как аптеки, больницы и другие. Однако, в силу различий в терминологии и структуре данных, это может быть сложной и трудоемкой задачей. В данной статье предлагается использование метода [1], который объединяет использование сиамской нейронной сети, нечеткого сопоставления (fuzzy matching) и косинусного расстояния для автоматического сопоставления номенклатур медицинских товаров, что может значительно упростить процесс и повысить его эффективность. Мы рассмотрим исследования, связанные с матчингом номенклатур медицинских товаров, которые помогут решить проблему их надежного сопоставления [2]. Опираясь на существующие методы и подходы, представим новые кейсы и исследования, которые помогут оптимизировать процесс сопоставления и обеспечить высокую точность и эффективность.

Наша цель состоит в том, чтобы предложить надежное решение для сопоставления номенклатур медицинских товаров. Исследование в этой области имеет большое значение для фармацевтической отрасли, поскольку точное сопоставление медицинских товаров позволит улучшить процессы учёта, продажи и управления запасами [3].

Методика

Для начала, был использован справочник медицинских товаров, содержащий 600000 позиций. Этот справочник был предварительно обработан путем удаления дубликатов, нормирования значений и применения словаря синонимов для приведения значений в общий вид. Такая обработка позволяет унифицировать данные и уменьшить шум.

Далее, применяется сиамская нейронная сеть [4, 5], которая обучается на размеченном наборе данных, содержащем пары номенклатур из аптеки и больницы. Сеть строится таким образом, чтобы находить семантические сходства и различия между номенклатурами. Каждая номенклатура проходит через сеть и получает векторное представление. Затем, сравниваются векторные представления с использованием косинусного расстояния [6].

Дополнительно, в процессе сопоставления применяется нечеткое сопоставление (fuzzy matching). Это позволяет учесть возможные опечатки, орфографические ошибки и вариации написания в номенклатурах. Нечеткое сопоставление основано на алгоритме Левенштейна и использует расстояние редактирования для оценки сходства строк.

Эксперименты и результаты

Для оценки эффективности предложенного метода был проведен эксперимент на справочнике медицинских товаров. В наборе данных было 600 000 позиций, которые требовалось сопоставить между аптекой и больницей. Использовалась метрика точности, которая оценивала долю правильно сопоставленных номенклатур.

Результаты экспериментов показали, что комбинированное использование сиамской нейронной сети, нечеткого сопоставления и косинусного расстояния дает высокую точность сопоставления номенклатур медицинских товаров. Метрика точности составила 92,542 %, что свидетельствует о высокой эффективности предложенного метода.

Применение на практике

Предложенный метод может быть применен на практике для автоматического сопоставления номенклатур медицинских товаров, например, между аптекой и больницей. Это позволит упростить и ускорить процесс сопоставления, уменьшить количество ошибок и повысить эффективность управления запасами и поиск альтернативных товаров.

Заключение

В данной статье был представлен метод, который объединяет сиамскую нейронную сеть, нечеткое сопоставление и косинусное расстояние для автоматического сопоставления номенклатур медицинских товаров. Результаты экспериментов показали высокую точность сопоставления, что подтверждает эффективность предложенного метода. Применение данного метода на практике может значительно улучшить процесс сопоставления номенклатур и повысить эффективность работы аптек и медицинских учреждений.

Список литературы

1. Guidotti R., Monreale A., Ruggieri S., Turini F., Giannotti F., Pedreschi D. A survey of methods for explaining black box models // ACM computing surveys. 2019. Vol. 51 (5). P. 93.
2. Jiang T. [et al.]. Combining embedding-based and symbol-based methods for entity alignment // Pattern Recognition. 2022. T. 124. C. 108433.
3. Srivastava S. K., Singh S. K., Suri J. S. State-of-the-art methods in healthcare text classification system AI paradigm // Frontiers in Bioscience-Landmark. 2020. T. 25, № 4. C. 646–672.
4. Bromley J., Bentz J. W., Bottou L. [et al.]. Signature verification using a siamese time delay neural network // International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence. 1993. Vol. 7 (4). P. 737–744.
5. Chopra S., Hadsell R., LeCun Y. Learning a similarity metric discriminatively, with application to face verification // 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05). 2005. Vol. 1. P. 539–546.
6. Li Y. [et al.]. Deep entity matching: Challenges and opportunities // Journal of Data and Information Quality (JDIQ). 2021. T. 13, № 1. C. 1–17.

Рождаемость и ионизирующая энергия галактических космических лучей

**Михаил Иванович Гринцов¹,
Виктория Михайловна Гринцова²**

¹Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²Дорожная больница, Москва, Россия

¹grintsovM@mail.ru

Аннотация. За 120 лет своего существования генетике не удалось решить ни проблем врожденных пороков развития, ни причин детской онкопатологии: почему одни дети на свет появляются здоровыми и со временем становятся талантливыми и гениальными, а другие дети заболевают онкопатологией? По критериям здоровья и одаренностей две эти группы условно можно считать «полярными». Сравнительный астрофизический анализ этих «полярных групп» показал, что между ними существуют достоверные различия в астрономических моментах времени как зачатия, так и рождения. Делается вывод о том, что во избежание риска рождения детей с пороками развития, для того чтобы на свет появлялись только здоровые и талантливые, необходимо располагать информацией о моменте времени образования и захвата гаметам и/или зиготой раковой/мутагенной дозы энергии ионизирующего излучения.
Ключевые слова: риск репродуктивного поведения, родители, дети, ионизирующая энергия, рак

Fertility and ionizing energy of galactic cosmic rays

Mikhail I. Grintsov¹, Victoria M. Grintsova²

¹Penza State University, Penza, Russia

²Road Hospital, Moscow, Russia

¹grintsovM@mail.ru

Abstract. For 120 years of its existence, genetics has not been able to solve either the problems of congenital malformations or the causes of childhood oncopathology: why do some children come into the world healthy and become talented and brilliant over time, while others – children and even infants – fall ill with oncopathology? According to the criteria of health and talents, these two groups of society can conditionally be considered "polar". A comparative astrophysical analysis of these "polar groups" showed that there are significant differences between them in the astronomical moments of both conception and birth. It is concluded that in order to avoid the risk of the birth of children with malformations, in order for only healthy and talented children to be born, it is necessary to have information

about the time of formation and capture by gametes and / or zygote of a cancerous / mutagenic dose of ionizing radiation energy.

Keywords: risk of reproductive behavior, parents, children, ionizing energy, cancer

Состояние проблемы. По небесспорным данным ВОЗ у 2,5 % новорожденных имеются пороки развития. В публикации [1] подчёркивается, что в мире зарегистрировано *около 6 тысяч различных заболеваний*. Из них 80% нозологических форм отнесены к редким заболеваниям. В 25 странах Евро союза $\approx 6-8\%$ от общей популяции страдают заболеваниями, причиной которых является наследственность и факторы экологии. В численном выражении это ≈ 30 млн лиц. Особенности этих групп является клинический полиморфизм, выраженная генетическая гетерогенность, наличие гено- и фенкопий. Этот сложный конгломерат патологических состояний создаёт диагностические трудности. Академик РАН В. Козлов [2] о «бесчисленном количестве» заболеваний выражается так: «В справочниках можно найти *около семи тысяч различных заболеваний*. Неужели существует столько же отдельных механизмов возникновения различных болезней? Нет, такого просто не может быть. Все эти ≈ 7 тыс. заболеваний можно разделить на 6 или 7 больших групп. а) атеросклероз; б) онкологическая патология; в) ауто иммунные и аллергические; г) вторичные иммунодефициты; д) инфекционные заболевания; е) хронические заболевания воспалительного генеза; ж) травмы; з) заболевания старости. Считаем, что разницей в одну тысячу редких нозологических форм между данными, приведенными [1–3] на фоне небесспорных данных ВОЗ на данном этапе развития онкологии можно пренебречь. В РФ пока не определены границы редких заболеваний.

По поводу причин онкопатологии В. Козлов [2] говорит: «*Основную роль в патогенезе онкологических заболеваний играют клетки иммунной системы. Причиной злокачественных заболеваний является подавление противоопухолевой активности клеток иммунной системы. Нарушения в иммунной системе обусловлены общебиологическими процессами*». Что подразумевается под «*общебиологическими процессами*», автор не уточняет. Около 40–50 % ранней младенческой смертности и инвалидизации обусловлены наследственными факторами. Проблема причин раковых видов патологии у младенцев и детей до сих пор не решена: на свет появляются младенцы с «созревшими» видами онкопатологии. Подавляющее число отечественных онкологов сходится на том, что причинами «рака младенцев» и детей младшего возраста должны быть причины «земные». Заметим, что такая простая идея, как изучение зачатия и рождения здоровых и талантливых и сравнение их с зачатием и рождением детей, у которых распознаны онкологические состояния, как-то стороной обходит сознание клинического генетика или онколога. А, собственно – почему?

Идея распознавания момента времени «старта ракового процесса» и его «ранней диагностики» в сознании некоторых клиницистов-онкологов и математиков стала доминирующей. В модели канцерогенеза В. А. Овсянникова [3] идея канцерогенеза понятно для клиницистов связана с энергетикой структур ДНК. Каждое основание ДНК может существовать в нескольких стабильных формах. В возбуждённом = активированном состоянии основания ДНК могут изменять свою молекулярную структуру. Энергетические воздействия на ДНК с энергией квантов в УФ- и иных энергетических диапазонах способны изменять структуры ДНК. При этом изменения топографии/ последовательности оснований ДНК может и не происходить, но генетические свойства таких участков ДНК существенно меняются. Невидимые потоки энергии – первичны. Видимые осязаемые мутации – вторичны. Мутации не являются главными и решающими. Они не играют решающей роли в развитии злокачественных заболеваний. Мутации – это всего лишь «морфологически невнятное сопровождение» – фон, наподобие «музыкального фона», тень. Не более того! Суть гипотезы канцерогенеза В. А. Овсянникова [3] в том, что причинами мутаций являются «удары потоков/импульсов энергии». Энергия «ударов» приводят к разрывам межмолекулярных связей между основаниями ДНК. С точки зрения автора гипотезы погоня за невнятным морфологическим фоном не может привести к точной диагностики начала ракового процесса. «Незавершённость» модели канцерогенеза В. А. Овсянникова, с нашей точки зрения, состоит в том, что автор не указывает конкретных источников энергии, которые способны вызывать мутации. Прodelав огромную работу по доказательству механизмов мутаций ДНК, автор не осмелился переступить «черту экологической оседлости» и не попытался изучить проблему «глядя из космоса», где рождаются потоки высоких плотностей ионизирующих видов энергии, которые разрушают геном не только в космосе, но и на Земле. Естественным дополнением идеи В. А. Овсянникова могла быть идея о клинической калибровке мощностей «ударов», которую Р. Зиверт связал с мощностью потоков ионизирующей энергии. Его идея одобрена мировым сообществом присуждением ему Нобелевской премии.

Из-за не гласного запрета искать причины земных мутаций в космосе идея В. А. Овсянникова не доведена до логического завершения – до идеи предотвращения рождения детей с онкопатологией. Идея «старта или ранней диагностики» ракового процесса с учётом калибровки Р. Зиверта заманчива, но не такая простая, как кажется на первый взгляд. В тезисном порядке меж дисциплинарный клубок противоречий, с нашей точки зрения – выглядит так:

- Предполагающая простое решение множества клинических проблем и гипнотизирующая рассудок некоторых генетиков и клиницистов идея д.ф-м.н. М. Н. Павлинского о том, что магнитосфера Земли

является «надёжным» экраном, предотвращающим вторжение энергии галактических космических лучей [4], скорее всего, является ошибочной.

- Идея М. Н. Павлинского о «надёжности экрана магнитосферы» Земли противоречит множество клинических наблюдений и астрофизических законов. Г. С. Фомин и О. Н. Фомина [5] пришли к выводам о том, что «основной вклад – от 60 до 90 % – в дозу облучения населения Земли вносят не земные катастрофы типа Чернобыль или Челябинск, не испытания ядерного оружия, не различные «земные» техногенные факторы, а «факторы космического происхождения».

- Академик РАН Л. М. Зелёный: космические лучи легко преодолевают магнитосферу Земли, которая представляет собой не «надёжный щит», а нечто вроде дуршлага, через который свободно проходят частицы и ливни = потоки энергии ГКЛ.

- Член корр. РАН А. Б. Кузнецов [6] задаётся вопросом: «Откуда на Земле появилась вода?» отвечает: «Примерно 10 % земной воды имеют не земное, а космическое происхождение. Эта лёд/вода – свободно преодолев магнитный экран Земли – прилетела на Землю из космоса в виде ледяных глыб. Это стало известно благодаря изотопным методам изучения воды океанов».

- Ак. РАН С. Г. Инге-Вечтомов: «главными физическими мутагенами являются такие виды ионизирующих излучений: Ro-лучи, α -, β -, γ -лучи, протоны, нейтроны, ^{60}Co и Ra, Ультрафиолетовый спектр излучений, который вызывает возбуждение атомов, переводя их на более высокие энергетические уровни. Мутагенный эффект субатомных частиц зависит от их скорости, массы, заряда. Физическое «мутагенное кредо» С. Г. Инге-Вечтомова расположено в пределах Земли и не переступает черту земной экологической оседлости. Данные С. Г. Инге-Вечтомова, Л. М. Зелёного и Г. С. и О. Н. Фоминых друг с другом не согласуются. Это разные подходы к толкованию мутагенеза.

- Суждения д.ф.-м.н. М. Н. Павлинского о «надёжности» магнитного экрана Земли противоречат клиническим наблюдениям. Говард Дж. Карп (2017): 95 % хромосомных мутаций не имеет наследственного характера и не опасны для родителей в будущих беременностях. Они возникают *de novo*! Мутации «не наследственного характера» могут означать, что их причиной могут быть факторы риска космического происхождения.

- Очередным «блоком междисциплинарных» противоречий и разночтений является идея о «главном театре генетических событий», которая раздваивается на две различные идеи: 1. Главным «театром генетических событий» может быть является а) плацентарный период эмбриофетогенеза; и 2. главным «театром генетических событий» является «свободный полёт мужской и женской гамет в Фаллопиевых яйцеводах до момента образования зиготы, с момента образования зиготы

до момента времени плацентации» Н. К. Кольцов [7]. Другими словами: или главные генетические события происходят в Фаллопиевых яйцеводах, или *in Utero*. Чем отличаются генетические события, происходящие в яйцеводах от событий *in Utero*? – Следующим: наличием «плацентарной защиты». Природа не предусмотрела защиту генетических событий в яйцеводах.

■ Что собой представляет «плацентарная защита плода». (Напомним, что внутриутробное развитие человека во многом не разгадано). Главной функцией организма женщины является сохранение плода. Факторами сохранения плода является группа белков: а) альфа2–микроглобулин фертильности (АМГФ); б) специфические белки беременности – трофобластический – бета1–гликопротеид (ТБ1); в) хорионический гонадотропин (ХГТ); г) плацентарный альфа1 микро глобулин (ПАМГ1), а также д) некоторые другие гуморальные располагающиеся в крови факторы; е) это также некоторые «неупорядоченные белки»: MYC, p53, K-KRAS. Из приведенного следует вывод, что «неупорядоченные белки» -MYC, p53, K-KRAS могут выполнять функцию плацентарной защиты зародыша → плода.

■ Зададимся вопросом: зачем Природа создала такой класс белков, которые так быстро/мгновенно меняют свою структуру/конфигурацию? Ответ можно отыскать в исследованиях французского исследователя М. Гоклена. Gauquelin M. в 50-х годах XIX века открыл «закон космической наследственности». Ребенок появляется на свет в тот астрономический момент времени, когда некоторые элементы карты его рождения совпадают с элементами карты рождения одного из родителей. Механизм «совпадения» элементов = эфемерид с элементами карты рождения отражает законы астрофизики и эфемеридной механики, влияющие на геном ребёнка. Открытие М. Гоклена: «Сочетание / конфигурация генов коррелирует с расположением / конфигурацией планет в момент зачатия» является революционным по своей сути. Как можно квалифицировать население эклиптики на предмет «упорядоченности» или «неупорядоченности?» Так вопрос не стоит. По той причине, что планеты/эфемериды пребывают в постоянной смене своих конфигураций. И меняют своё месторасположения «не абы как», не «куда попало» и не «когда попало», а точно по расписаниям движения планет Солнечной системы. По-видимому, класс неупорядоченных белков: MYC, p53, K-KRAS являются естественными продуктами, которым «предписано» адекватно реагировать на постоянно меняющуюся топологию энергии планет.

Отечественный биолог Н. К. Кольцов [7] возмущался «*пренебрежением роли факторов внешней среды*». «...По химическому составу хромосомы состоят из сложнейших органических соединений, которые, обладая большей или меньшей лабильностью, могут реагировать

на внешние воздействия, ... и следовало бы ожидать, что измененные таким путем гаме ты окажутся неспособными к дальнейшему развитию. В 1916 г. я высказал мысль, что таким фактором следует избрать **глубоко проникающие необычные в природе рентгеновские лучи**». Подчеркнём: *необычные в природе рентгеновские лучи*. Какой-то физический аналог рентгеновых лучей? «Неужели гамма-лучи и космические лучи (являются) единственной причиной изменчивости и всей эволюции?» задается вопросом Н. К. Кольцов. У внимательного читателя складывается впечатление, что Н. К. Кольцов сто лет назад точно указал причину множества земных мутаций. ...Беспорядочная бомбардировка хромосом лучами или электронами всегда должна носить чисто случайный характер, и при ограниченном количестве гамет мало... шансов ожидать, что в двух одинаковых зданиях случайной пулей будут выбиты кирпичи, занимающие одинаковое положение». (с. 212). Критически оценивая меру своей осведомленности в соседних отраслях знаний, он скажет: «Я предпочитаю лучше заслужить упрек в дилетантском отношении к соседним наукам, чем вовсе от них отмежеваться». Это сказано в 1916 году. В. Боте в 1929 г. за серию работ по этой тематике присуждена Нобелевская премия.

Посчитав, что идеи М. Гоклена, Э. О"Дей, О. А. Барсукова и В. Е. Фортова не были «наполнены клиническими исследованиями», а их теории являлись не завершёнными, мы приняли решение дополнить их результатами клинических наблюдений. Дополнения состояли в следующем: а) *первая группа лиц* – изучили моменты времени зачатия и рождения выдающихся исторических лиц (академики, нобелевские лауреаты, представители духового мира, писатели, поэты, композиторы и др.). Всего порядка 380 лиц. *Вторая группа*: 270 детей раннего возраста, у которых диагностированы различные виды онко- и онкогематопатологии.

Результаты исследований.

- случаи онкологических состояний (онкопатологии) у младенцев и детей раннего возраста ассоциируются с конфигурациями планет, которые можно условно назвать «открытые окна/ворота вторжения высоких плотностей ионизирующих видов энергии галактических космических лучей»;

- случаи рождения здоровых и талантливых исторических лиц достоверно ассоциируются с такими конфигурациями планет, которые условно можно назвать: «закрытые ворота вторжения высоких плотностей ионизирующих видов энергии галактических космических лучей».

Возникает вопрос: существуют ли связи между «неустойчивой» кон фигурацией белков и постоянно меняющейся конфигурацией эфемерид? И те и другие «неустойчивые», зыбкие, сыпучие, меняющие форму «как ртуть». Поскольку «неустойчивость» эфемерид является не исключением, а законом, то, можно предположить, что «неустойчивость»

структур белков имеет те же причины, которые дарованы планетам – их предназначение состоит в том, чтобы «успевать» за изменениями формы планет и «защищать» генный аппарат зародыша и плода. Идея Э. О Дей «блокировать» неупорядоченные белки и сделать их «неподвижными» для того, чтобы фармакологическими препаратами было бы удобнее их «ликвидировать», по-видимому, не имеет будущего. Если цель фармакологии «блокировать эти белки, создать их удобную неподвижную мишень» для их ликвидации, то эта идея может быть опасной для организма, в котором Природой запрограммированы меняющиеся конфигурации белков. Блокировать движение частиц крови чем-то напоминает образование искусственного тромба в токе крови. Либо мы недостаточно глубоко прониклись идеей О. Дей, либо в ней осознанно заложена идея искусственного образования тромбов. Не умысел ли такая идея?

С нашей же точки зрения, репродуктологу-генетику в каждом конкретном случае так необходимо встроить семидневный период с момента овуляции, образования зиготы и до момента плацентации, чтобы образование зиготы до момента её плацентации происходило при «закрытом окне» вторжения ионизирующей энергии галактических космических лучей.

Момент времени зачатия свободного полёта гамет до образования зиготы, момента образования зиготы до её плацентации, не должен наслаиваться = не должен совпадать с такой конфигурацией планет, при которой «открыты ворота вторжения высоких плотностей ионизирующих видов энергии ГКЛ. Суть идеи избегания захвата раковой дозы ионизирующей радиации состоит в том, что вычисляя координаты = положения планет/ эфемерид на эклиптике, мы можем предсказывать момент времени рождение как здоровых и талантливых, так и предвидеть и предотвращать рождение больных и немощных.

Заключение. 100-лет назад Н. К. Кольцов утверждал: «мы имеем все основания утверждать, что X-лучи и гамма-лучи радия действуют или непосредственно на хромосомы зачатковых клеток, в особенности в период митотического деления, или же вызывают ионизацию и бомбардировку электронами. В одних случаях бомбардировка лучами и электронами, величина которых соизмерима с атомными группами внутри гигантских хромосомных молекул, не нарушая целостности самой молекулы, выбивает из нее атомы или мельчайшие группы атомов, что ведет к новому устройству молекулы, новой её устойчивости. Под действием ионизирующей энергии в хромосомном аппарате происходят: фрагментации, делеции, транслокации и дупликации, отмечены необычные «взрывы» /всплески мутаций. Бомбардировка зародышевых клеток, нарушение генома гамет и зиготы происходят в период свободного полета гамет до образования зиготы, а зиготы до плацентации может происходить всего шесть-семь дней после созревания яйце клетки,

образования зиготы и прохождения её по яйцеводу к полости матки в место плацентации. В огромном большинстве случаев зачатковая клетка с измененной хромосомой оказывается настолько испорченной, что не в состоянии развиться в гамету, способную к оплодотворению. В других случаях она развивается в гамету, которая входит в оплодотворенный состав зиготы, но эта зигота погибает на той или иной стадии развития: ген оказывается летальным» [7, с. 209]. Плацентация не наступает. Поражение хромосом лучами или электронами/корпускулами (веществом) происходит по не по «законам случайностей», а по «графику», обращения тел Солнечной системы. В законах обращения тел Солнечной системы «случайностей» нет. Традиции населения «хаотического репродуктивного поведения» представляют собой большой риск рождения детей с пороками развития, в том числе и с онкопатологией. Законы репродуктологии должны быть согласованы с законами Солнечной системы. Другого выхода предотвращения рождения детей с пороками развития, по-видимому, не существует. Надеяться на то, что исследователи синтезируют необходимые лекарственные препараты для исправления «генов» – идея утопическая.

Выводы. 1. Бомбардировка генного аппарата ионизирующими видами луче вой энергии галактических космических лучей (ГКЛ) носит не случайный характер, а подчиняется законам обращения планет/эфемерид. 2. Импульсные потоки энергии ГКЛ обеспечиваются конфигурациями эфемерид. 3. В законах обращения планет записаны: «график и календарь» этих бомбардировок, калибровка мощностей энергии ГКЛ. 4. Идея зачатия и появления на свет здоровых и талантливых детей является простой и доступной вычислительной операцией репродуктологии, не требующей ни дорогостоящего лабораторного оборудования, ни реактивов. Достаточно простых навыков работы с программой «ZET». 5. Наполненная клиническими наблюдениями гипотеза канцерогенеза отечественных исследователей О. А. Барсукова и В. Е. Фортова становится теорией.

Рисунок 1 конфигурация планет/эфемерид, которая будет образована 21 июня 2030 г. будет благоприятной для тех женщин, у которых к этому времени созреет яйцеклетка и будут иные условия для продления рода. Если зачатие будет «организовано» $\approx$ от 15:15 до 17:15 21 июня 2030г. на координатах г. Пенза или области, то имеется высокая вероятность рождения здорового и талантливого ребёнка. Обоснование заключения: Окно вторжения высоких плотностей ионизирующих видов лучевой энергии на дату 21 июня 2030 г. и на время суток от 15:15 до 17:15 будет надёжно закрыто кластером планет (Солнце, Марс, Уран, Меркурий, Сатурн и Венера). Гаметы родителей и вновь образованная зигота до момента плацентации не будут подвергаться повреждению энергией галактических космических лучей. По Законам обращения тел Солнечной системы.

Дата 21 июня 2030г. на координаты г. Пенза при зачатии в 16:50 (после обеда) предполагает зачатие здорового и талантливого ребенка.
Плациус
Топоцентрическая

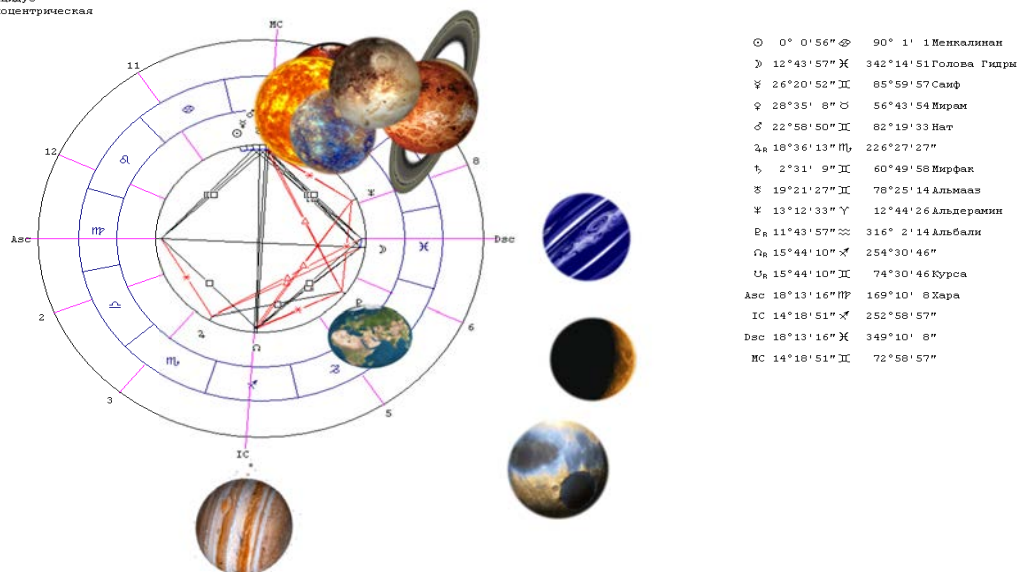


Рис. 1. Конфигурация планет/эфемерид, которая будет образована 21 июня 2030 г. на координатах Пензенской обл. станет благоприятной для тех женщин, у которых к этому времени созреет яйцеклетка и будут образованы иные условия для продления рода.

Список литературы

1. Назаренко Л. П., Ковалёва И. А., Захарова Е. Ю. Редкие (орфанные) заболевания – проблемы и перспективы // Молекулярно-биологические технологии в медпрактике : сб. Новосибирск, 2012. С. 103–109.
2. Козлов В. Семь тысяч бед – один ответ // Поиск. 2022. № 27.
3. Овсянников В. А. Энергетическая модель канцерогенеза // Вопросы онкологии. 2005. Т. 51, № 1.
4. Алексеев С. О., Белинский А. А., Блинников С. И. [и др.]. Многоканальная астрономия. Фрязино : Век 2, 2019. 528 с.
5. Фомин Г.С., Фомина О. Н. Воздух. М., 2002. 422 с.
6. Кузнецов А. Б. В Мире науки. 2021. № 8/9.
7. Кольцов Н. К. Очерки, статьи, документы. М. : Научный мир, 2021. 598 с.
8. Гоклен М. Роковые воздействия космоса : сб. диалоги... М. : Изд-во политической литературы, 1989. С. 287–294).
9. О'Дей Э. Внутренние неупорядоченные белки как мишени для лекарств // В мире науки, 2020. № 1-2. С. 12–13.
10. Барсуков О. А. Основы физики атомного ядра. Ядерные технологии. М. : Физматлит, 2011. 559 с.
11. Фортов В. Е. Физика высоких плотностей энергии. М. : Физматлит, 2013. 710 с.

Автоматизация формирования оптимального портфеля инвестиций

**Евгений Васильевич Десяев¹,
Татьяна Фанадовна Мамедова²**

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, Саранск, Россия
¹desyaev@rambler.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача автоматизации формирования оптимального портфеля инвестиций. Создано программное обеспечение реализующее формирование оптимального портфеля на основе применения модели Марковица. Для создания программного обеспечения использован язык программирования Python и среда разработки Google Colab.

Ключевые слова: инвестиционный портфель, математическая модель Марковица, язык программирования

Automation of the formation of the optimal investment portfolio

Evgeny V. Desyaev¹, Tatiana F. Mamedova²

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia
¹desyaev@rambler.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Abstract. The problem of automating the formation of an optimal investment portfolio is considered. Software has been created that implements the formation of an optimal portfolio based on the application of the Markowitz model. To create the software, the Python programming language and the Google Colab development environment were used.

Keywords: investment portfolio, Markowitz mathematical model, programming language

Задача оптимизации портфелем инвестиций не является новой. Многие ученые успешно решали эту задачу. Современный уровень развития вычислительной техники позволяет внести в решение этой задачи новые методы.

Применение новых подходов к изучению финансового рынка, и в частности рынка ценных бумаг, объясняется тем, что деятельность на финансовом рынке является исключительно наукоемкой и потенциально высокоприбыльной сферой бизнеса. Каждый инвестор, как физическое либо юридическое лицо, вкладывая средства в различные ценные бумаги, формирует свой личный портфель ценных бумаг. Одной из его

целей является получение прибыли в будущем. Для этого ему необходимо прогнозировать цены акций и формировать портфель оптимальным образом. Исследованием этой тематики занимались многие ученые: Г. Марковиц, В. Шарп, Р. Ролла, С. Росса, Дж. Линтнер и др.

Рассмотрим задачу оптимизации инвестиционного портфеля на основе модели Марковица [1,2].

Данные по стоимости акций были взяты с сайта bcs-express.ru. Графики изменения стоимости акций (в российских рублях) компаний «Красный Октябрь», «Полюс», «РБК» и «Черкизово» по месяцам за последние 5 лет (с 01.01.2018 по 01.01.2023) приведены на рис. 1–4.



Рис. 1. Акции компании «Красный Октябрь»

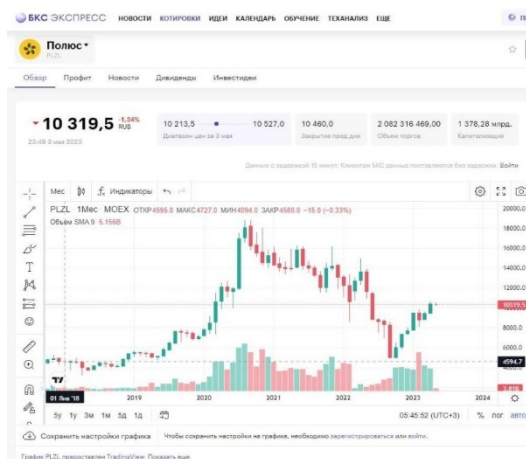


Рис. 2. Стоимость акций компании «Полюс»

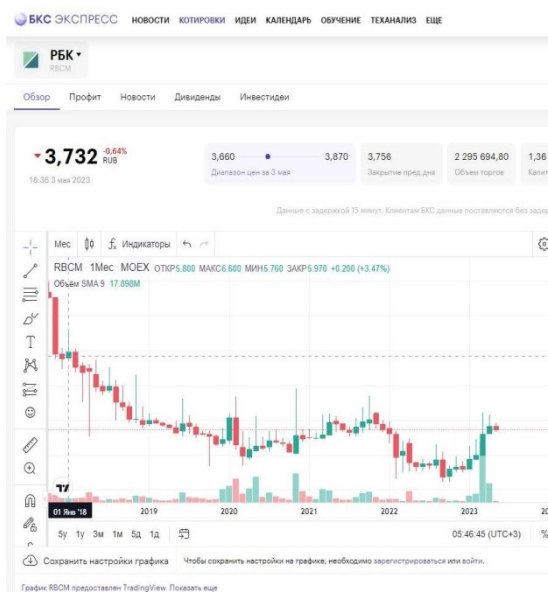


Рис. 3. Стоимость акций «РБК»

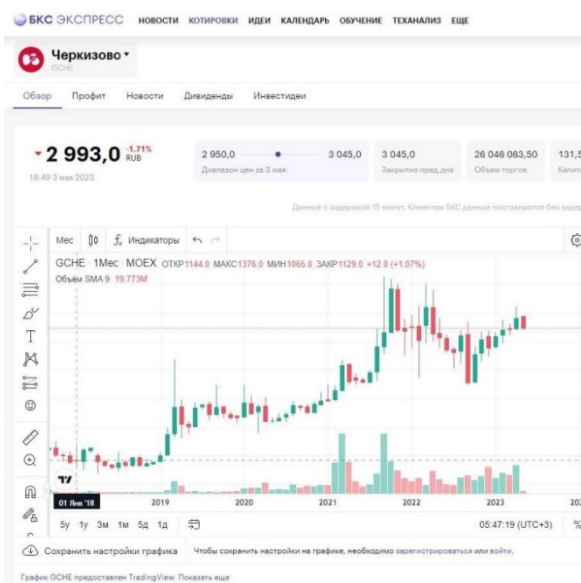


Рис. 4. Акции компании «Черкизово»

Для реализации метода Марковица была написана программа на языке программирования Python с использованием среды разработки Google Colab.

В результате работы программы получена оптимальная структура портфеля инвестиций для рассмотренного выше набора акций (рис. 5).



Рис. 5. Оптимальная структура портфеля инвестиций

Таким образом, для формирования оптимального портфеля инвестиции нужно, чтобы инвестор приобрел 49,1 % акций компании «Черкизово», 22,8 % акций компании «Плюс», 17 % акций компании «Красный Октябрь» и только 11,1 % акций компании «РБК».

Список литературы

1. Мамедова Т. Ф., Зайцев В. Д. О моделировании рисков инвестиционных проектов // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XIII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (г. Пенза, 3–6 июня 2019 г.). Пенза : Изд-во ПГУ, 2019. С. 136–141.
2. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., Якунина А. Д. О моделировании динамических процессов // XXIV Туполевские чтения (школа молодых ученых) : Междунар. молодёжная науч. конф. (7–8 ноября 2019 г.) : материалы конф. Казань : Изд-во ИП Сагиева А. Р., 2019. С. 229–232.

Математическое моделирование распространения вирусных заболеваний

Полина Алексеевна Дужникова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
ptgnt@mail.ru

Аннотация. Работа носит обзорный характер и посвящена математическим моделям распространения вирусных заболеваний. Рассмотрены различные виды математических моделей, основанных на дифференциальных уравнениях. Дано краткое описание моделей и их особенности.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, вирусные заболевания, математическая модель, уравнение диффузии, стохастические модели

Mathematical modeling of the spread of viral diseases

Polina A. Duzhnikova

Penza State University, Penza, Russia
ptgnt@mail.ru

Abstract. The paper is of an overview nature and is devoted to mathematical models of the spread of viral diseases. Various types of mathematical models based on differential equations are considered. A brief description of the models and their features is given.

Keywords: differential equations, viral diseases, mathematical model, diffusion equation, stochastic models

Математические модели можно разделить на следующие категории: агентно-ориентированные модели, модели, основанные на анализе временных рядов, комбинированные модели, а также дифференциальные модели.

Статья посвящена обзору нескольких моделей динамики вирусных заболеваний. Все модели, описанные в статье основаны на дифференциальных уравнениях.

Перейдем к рассмотрению математической модели с использованием в качестве основы уравнения Фоккера-Планка (уравнение диффузии со сносом) [1]. Впервые оно было использовано для статистического описания систем. Уравнение диффузии со сносом очень часто используется для моделирования процессов, где имеется диффундирующий источник в любом месте пространства, вследствие чего происходит распространение по пространству некоторой субстанции по определённым

статистическим законам. В данном случае аналогом такой системы рассматривалось заражение вирусной инфекцией с определённой вероятностью группы здоровых людей некоторым источником (больной группой людей). Поэтому математическая модель в основном была представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} X) + rX(1-b-m-n-p) + \operatorname{div} \bar{w}gX + X_0(x, y, t); c(x, y, z, t) < c_b \\ X = 0, c(x, y, z, t) < c_b \end{cases}$$

где $X = AN(x, y)c(x, y, z, t)$ – плотность больных в зонах инфицирования; $N(x, y)$ – плотность населения; $c(x, y, z, t)$ – концентрация инфицирующих бактерий в окружающей среде (причем если $c(x, y, z, t) = c_b$ – граничному значению инфицирующей концентрации, то в точке (x, y, z, t) начинается заболевание среднего человека, если $c(x, y, z, t) < c_b$, то в точке (x, y, z, t) заболевания нет); A – медико-биологический когнитивный коэффициент, характеризующий контагиозность данного вида инфекции; K – некоторый когнитивный коэффициент, зависящий от принятых допущений при рассмотрении процессов. В частности, это может быть коэффициент горизонтальной диффузии инфекции, если описывается процесс распространения инфекции в турбулентном поле воздуха ограниченного пространства, характеризующий скорость изменения плотности заражённых; r – некоторый когнитивный медико-биологический коэффициент, характеризующий интенсивность эволюционного нарастания или убывания (наличие источников или стоков) концентрации инфекции от больных людей; $b(x, y, t), m(x, y, t), n(x, y, t)$ – доли X , изменяющие на данный момент в точке (x, y, t) плотность больных людей; $b(x, y, t)$ – доля X людей, у которых инкубационный период развития болезни, $m(x, y, t)$ – доля X выздоравливающих людей благодаря собственным защитным силам организма, $n(x, y, t)$ – доля X людей, ускоренно выздоравливающих благодаря принятым мерам борьбы с эпидемией, включая изоляцию больных, p – доля X , уменьшающая число новых больных и концентрацию вирусов из-за гибели инфекции в результате воздействия климатических условий (мороз, жара и т.п.) и конечной жизни вирусов в результате мутаций; $\bar{w}$ – усреднённая скорость адвективного перемещения больных людей в определённом направлении или скорость перемещения инфекции в поле перемешивания в толпе людей; $X_0(x_0, y_0, t_0)$ – начальной концентрацией c_0 .

Однако данная модель может быть использована для прогнозирования распространения инфекций среди здоровых людей в пре-

делах точности для усреднённых характеристик стохастической среды больных людей. При этом полагалось, что инфекция начала распространяться из единого центра. Заболевшие люди ещё не становились источником заражения. Таким образом, моделирование для нестационарных процессов распространения вирусной инфекции среди населения городов с высокой плотностью проживания капельно-воздушным путём, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, было разработано на основе детерминистических принципов.

Далее рассмотрим математическую модель пространственно-временной динамики вирусной инфекции с учетом противовирусного иммунного ответа [4]. Модель формулируется в виде одномерного уравнения реакции диффузии для пространственно-распределенной вирусной популяции с начальным условием и учитывает индуцированную вирусом клональную экспансию Т-клеток, также их гибель в результате апоптоза.

Для того чтобы сформулировать уравнение динамики вируса, предположим, что доза антигена – период времени, в течение которого он доступен, и его «географическое» распределение внутри данного хозяина влияют на продолжительность и степень иммунных реакций [7]. Лежащая в основе регуляция подразумевает колоколообразную взаимосвязь между вирусной нагрузкой и величиной противовирусного Т-клеточного ответа, так что высокое количество антигена приводит к истощению Т-клеток [5, 6]. Биологическая схема модели и соответствующие процессы показаны на рис. 1.



Рис. 1. Схематическое изображение регуляции динамики вирусной инфекции [3]

Предполагается, что величина клональной экспансии является нелинейной функцией вирусной нагрузки с задержкой по времени. Рассмотрим уравнение для концентрации вируса v в лимфоидных органах, таких как селезенка или лимфатические узлы:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k(1-v)v - f(v(t-\tau, x))v(t, x), \quad (1.1)$$

$$v(0, x) = \varphi(x). \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) представляет собой квазилинейное функциональное уравнение реакции-диффузии, а (1.2) – начальное условие (1.1). Первый член в правой части уравнения описывает распространение вируса, второй член – его продукцию, а последний член – его элиминацию клетками CTL. Параметр D представляет собой коэффициент диффузии, а k – константу скорости репликации. Параметризованная функция $f(v(t-\tau, x))$ – τ характеризует индуцированную вирусом клональную экспансию Т-клеток, т.е. количество и функцию этих клеток, генерируемых после некоторой временной задержки τ , т.е. она зависит от концентрации вируса за некоторое время до этого. Качественная форма этой функции показана на рис. 2.

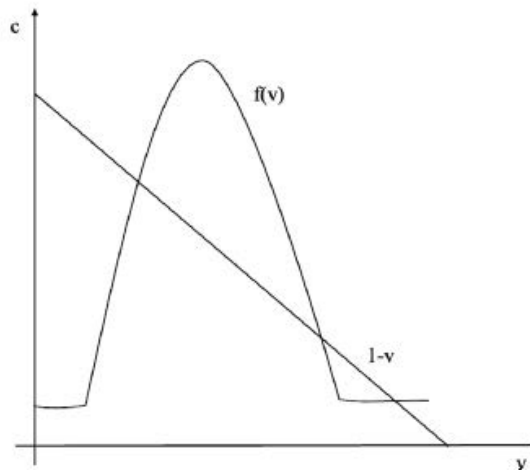


Рис. 2. Качественная форма функции $f(v)$ [3]

Инфекция низкого уровня стимулирует иммунный ответ (рис. 1), в то время как инфекция высокого уровня подавляет его. Первое соответствует растущей ветви функции $f(v)$ на рис. 2, а второе – ее убывающей ветви.

Следующая модель – реакционно-диффузионная эпидемиологическая модель. Математическое описание таких моделей содержит систему уравнений в частных производных типа уравнений, описывающих диффузию с химической реакцией [3]. Количество уравнений и явный вид членов соответствующих реакций зависят от выбранной модели передачи инфекции, количества рассматриваемых групп населения, разделенных по возрасту и деятельности (школьники, работающие, пенсионеры и т.д.). Параметры реакционно-диффузионной модели типа

диффузионных коэффициентов характеризуют мобильность данной группы населения. Некоторые авторы учитывают естественное изменение численности населения за счет рождаемости и смертности, а также мобильность выздоровевших, обладающих иммунитетом. Однако эта группа населения не влияет на динамику заболевания, и ее можно не учитывать при анализе эпидемии. В данной статье приведем пример двухмерной модели, базирующейся на SIR-модели.

$$\frac{\partial s_n}{\partial t} = a_s \left(\frac{\partial^2 s_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_n}{\partial y^2} \right) - \alpha_{d1} s_n i_n; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial i_n}{\partial t} = a_i \left(\frac{\partial^2 i_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i_n}{\partial y^2} \right) - \alpha_{d1} s_n i_n - \alpha_{d2} i_n; \quad (1.4)$$

где a_s и a_i – параметры, характеризующие мобильность восприимчивых и инфицированных, соответственно s_n и i_n , их нормированные плотности в рассматриваемой области. Отметим, что плотность выздоровевших (r_n) может быть определена с использованием решений уравнений (1.3), (1.4) и

$$\frac{\partial r_n}{\partial t} = a_t \left(\frac{\partial^2 r_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r_n}{\partial y^2} \right) + \alpha_{d2} r_n$$

Рассмотрим стохастические модели. Использование СДУ позволяет учитывать и анализировать случайные флуктуации эпидемиологического процесса (процессы заражения, тестирования, выздоровления и др.) [2]. Кинетические уравнения с мерой, описывающие динамический закон предела больших чисел для системы с большим числом N агентов, разрешимы и что их решения представляют собой $1/N$ -равновесия по Нэшу для аппроксимирующих систем из N агентов. Указанное заключение получено в предположении, что в основе динамики репрезентативных агентов лежит управляемый нелинейный марковский процесс, связанный с интегродифференциальными генераторами типа Леви-Хинчина (с переменными коэффициентами), с основным упором на приложения к устойчивым и устойчивоподобным процессам. В частности, показано, что функция управления γ задает нелинейный марковский процесс μt , порожденный семейством операторов $A[t, \mu_t, \gamma(t, \cdot)]$, через общее кинетическое уравнение в слабой форме:

$$\frac{d}{dt}(g, \mu_t) = (A[t, \mu_t, \gamma(t, \cdot)]g, \mu_t), \quad \mu_0 = \mu.$$

Известно, что плотность потока частиц в размножающей среде при достаточно широких условиях асимптотически экспоненциальна по времени t с некоторым параметром λ , т.е. с показателем λt . Если среда

случайна, то параметр λ – случайная величина, и для оценки временной асимптотики среднего (по реализациям среды) числа частиц можно в некотором приближении осреднять экспоненту по распределению λ . предположении гауссовости этого распределения таким образом получается асимптотическая «сверхэкспоненциальная» оценка среднего потока, выражаемая экспонентой с показателем $tE\lambda + t^2 D\lambda / 2$. Для численной экспериментальной проверки такой оценки разработано вычисление вероятностных моментов случайного параметра λ на основе рандомизации фурье-приближений специальных нелинейных функционалов.

Список литературы

1. Ключкова Л. В., Орлов Ю. Н., Тишкин В. Ф. Математическое моделирование стохастических процессов распространения вирусов в среде обитания людей // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020. № 114. 17 с.
2. Криворотько О. И., Кабанихин С. И. Математические модели распространения COVID-19 // Математический центр в академгородке. Новосибирск, 2021. 56 с.
3. Соколовский В. С., Фурман Г. Б., Полянская Д. А., Фурман Е. Г. Пространственно-временное моделирование эпидемии COVID-19 // Анализ риска здоровью. 2021. № 1. С. 23–37.
4. Bocharov G., Meyerhans A., Bessonov N. [et al.]. Spatiotemporal Dynamics of Virus Infection Spreading in Tissues // PLoS ONE. Vol. 11 (12). P. e0168576.
5. Richter K., Brocker T., Oxenius A. Antigen amount dictates CD8+ T-cell exhaustion during chronic viral infection irrespective of the type of antigen presenting cell // European Journal of Immunology. 2012. doi: 10.1002/eji.201142275 ++
6. Wherry E. J., Kurachi M. Molecular and cellular insights into T cell exhaustion // Nature Reviews Immunology. 2015. Vol. 15, № 8. P. 486–499.
7. Zinkernagel R. M., Hengartner H. Regulation of the immune response by antigen // Science. 2001. Vol. 293. P. 251–253.

Аналитические и численные методы исследования математических моделей эпидемиологии

Елена Сергеевна Меркушина

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
merkushina.lena12@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются математические модели SIR и SEIRD распространения эпидемии. Для модели SIR были проведены вычислительные эксперименты, исходя из которых были построены графики. По этим графикам экспериментально установлены пороговое значение фактора заболевания и пороговое значение фактора выздоровления. На основе классической SEIRD-модели построена модификационная модель SEIIRDm, учитывающая особенности распространения инфекции. На базе созданной модели проведены численные расчеты, которые, в частности, демонстрируют значимость введения массовых карантинных мер.

Ключевые слова: распространение эпидемии, SIR-модель, модифицированная модель SEIIRDm

Analytical and numerical methods research of mathematical models of epidemiology

Elena S. Merkushina

Penza State University, Penza, Russia
merkushina.lena12@gmail.com

Abstract. Mathematical models of SIR and SEIRD of the spread of the epidemic are considered. For the SIR model, computational experiments were carried out, on the basis of which graphs were constructed. According to these graphs, the threshold value of the disease factor and the threshold value of the recovery factor were experimentally established. Based on the classic SEIRD model, a modification model SEIIRDm was built, taking into account the specifics of the spread of infection. On the basis of the created model, numerical calculations were carried out, which, in particular, demonstrate the significance of the introduction of mass quarantine measures.

Keywords: epidemic spread, SIR model, modified SEIIRDm model

Введение

Развитие современной медицины не стоит на месте и характеризуется широким применением математических методов и вычислительной техники.

Математическая модель распространения инфекционного заболевания в популяции описывает передачу патогена между хозяевами в зависимости от характера контактов среди больных и восприимчивых людей, латентного периода от заражения до заражения, продолжительности болезни, степень приобретенного иммунитета после заражения и т.д. Исследование математических моделей инфекционных заболеваний позволяет выявить не только важные закономерности пандемии, но и возможные варианты эпидемического контроля.

SIR-модель

В 1927 г. Уильям Кермак и Андерсон МакКендрик ввели несколько детерминированных моделей [1,2], описывающих эволюцию болезни в закрытой популяции. Их наиболее общая модель состоит из уравнения восстановления для инфекции и принимает форму следующего нелинейного интегрального уравнения Вольтерра:

$$u(t) = \int_0^t \Gamma(\tau) g(u(t-\tau)) d\tau + f(t), t > 0. \quad (1)$$

Неизвестная функция $u(t) \geq 0$ (кумулятивная сила заражения) показывает, «насколько» население заражено к моменту времени $t > 0$. Если $u=0$, то это означает отсутствие заражения, если $u > 0$ – часть населения инфицирована. Ядро $\Gamma(\tau)$ кодирует характеристики эпидемии (средняя продолжительность заражения, инкубационный период и т.д.). Функция g отражает нелинейный рост эпидемии. Наконец, функция $f(t)$ учитывает начальную инфекционность.

Системы SIR [3,4] представляют собой компартментальные модели, то есть популяция делится на несколько классов (компарментов), которые взаимодействуют по некоторым простым правилам. Первая модель SIR была введена как частный случай общей модели (1). Она принимает форму следующего набора ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha S(t)I(t), t \in R, \\ \dot{I}(t) = \alpha S(t)I(t) - \mu I(t), t \in R, \\ \dot{R}(t) = \mu I(t), t \in R, \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha, \mu > 0$. Функции S, I, R являются неизвестными и представляют соответственно количество восприимчивых, заразных и выздоровевших особей в популяции. Инфекционные особи заражают восприимчивых по закону действия масс, т.е. скорость заражения равна αI . Заразные особи выздоравливают со скоростью μ . Заметим, что восстановленная функция R не играет никакой роли в динамике системы.

Для построения модели введем следующие обозначения: susceptible – восприимчивые, infected – инфицированные, recovered –

выздоровевшие, *get_stick* – интенсивность протекания заболевания, *get_well* – интенсивность выздоровления, *infection_rate* – фактор, влияющий на процесс заболевания, *recovery_rate* – фактор, влияющий на процесс выздоровления.

Модель распространения эпидемии описывается системой уравнений:

$$\frac{d(susceptible)}{dt} = -get\_stick, .$$

$$\frac{d(infected)}{dt} = get\_stick - get\_well, .$$

$$\frac{d(recovered)}{dt} = get\_well, .$$

где

$$get\_stick = susceptible \times infected \times infection\_rate, .$$

$$get\_well = infected \times recovery\_rate, .$$

Возьмем начальные данные: *susceptible* = 1000, *infected* = 1, *t* = 20 дней.

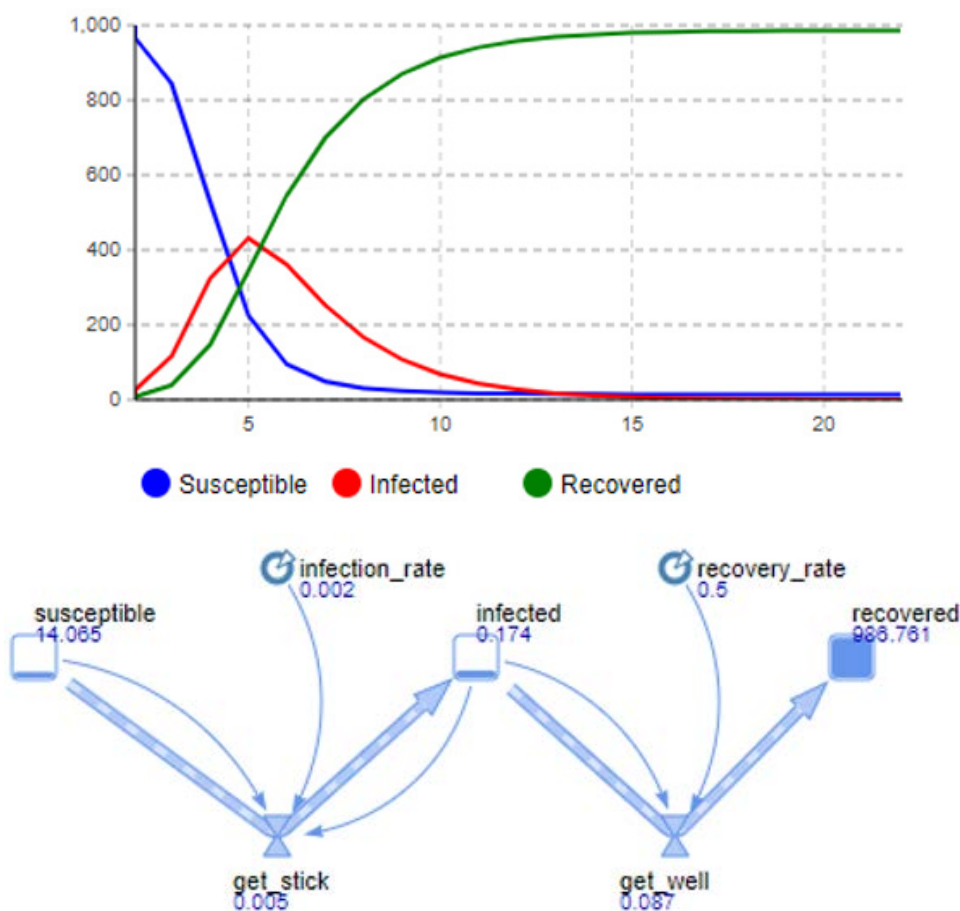


Рис. 1. График при *infection_rate* = 0.002

После многочисленных экспериментов был сделан вывод, что пороговое значение параметра, при котором все люди инфицируются (infection rate), равен 0.002. При infection rate > 0.002 все люди будут инфицированы.

Оставим параметр infection rate равным 0.001 и будем изменять параметр recovery_rate.

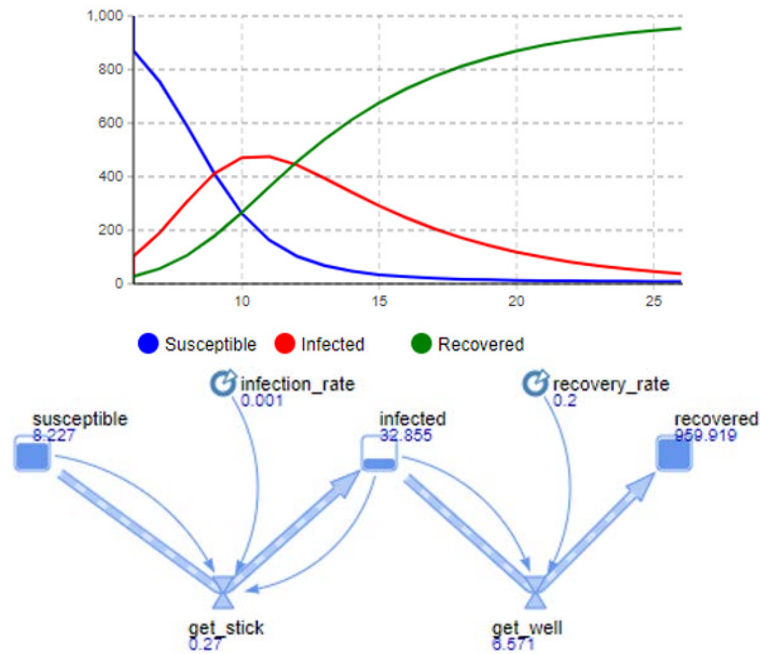


Рис. 2. График при infection_rate = 0.2

Экспериментально было выявлено, что пороговое значение параметра recovery rate является 0.2. При recovery rate < 0.2 все люди будут инфицированы.

SEIRD-модель

Модифицированная SEIRDm-модель [5] задается системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{S}(t)}{dt} = -\beta \rho(t) \left(\tilde{S}(t) \left(\tilde{I}_1(t) + \theta \tilde{E}(t) \right) \right)^n, \\ \frac{d\tilde{E}(t)}{dt} = \beta \rho(t) \left(\tilde{S}(t) \left(\tilde{I}_1(t) + \theta \tilde{E}(t) \right) \right)^n - \delta \tilde{E}(t), \\ \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = \delta \tilde{E}(t) - \gamma_1 \tilde{I}_1(t) - \gamma_2 \tilde{I}_2(t) - \mu \tilde{I}_2(t), \\ \frac{d\tilde{R}(t)}{dt} = \gamma_1 \tilde{I}_1(t) + \gamma_2 \tilde{I}_2(t), \\ \frac{d\tilde{D}(t)}{dt} = \mu \tilde{I}_2(t), \\ \tilde{I}_1(t) = \xi \tilde{I}(t), \\ \tilde{I}_2(t) = \tilde{I}(t) - \tilde{I}_1(t). \end{array} \right.$$

При этом:

β – вероятность получения болезни в случае контакта восприимчивого индивидуума с заразным,

θ – коэффициент, характеризующий степень заразности латентных больных,

ξ – доля инфицированных с бессимптомным течением болезни,

$\rho(t)$ – функция, отражающая зависимость от времени степени жёсткости карантинных мер,

μ – коэффициент летальности,

γ_1 – коэффициент, характеризующий скорость выздоровления инфицированных с бессимптомным течением болезни,

γ_2 – коэффициент, характеризующий скорость выздоровления инфицированных с явными проявлениями болезни,

δ – коэффициент, характеризующий скорость перехода из латентной фазы в фазу инфицирования,

n – параметр, характеризующий степень нелинейности.

Рассмотрим две ситуации:

1. карантинные меры, охватывающие всю рассматриваемую популяцию, не введены;

2. введены карантинные меры, охватывающие всю рассматриваемую популяцию.

Коэффициенты задачи подберем, используя статистические (усредненные) данные: $T_1 = 18$, $T_2 = 5.2$, коэффициент смертности – $\mu = 0,08$, $\xi = 0.8$, $\delta = 0.192$, $\gamma = 0.056$. Тогда число заражений от одного ин-

фицированного человека – репродуктивное число $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} = 3.43$. Коэф-

фициент, характеризующий скорость выздоровления инфицированных с бессимптомным течением болезни, будет равен $\gamma_1 = \frac{1}{7} = 0.143$. Коэф-

фициент, характеризующий скорость выздоровления инфицированных с явными проявлениями болезни, – $\gamma_2 = \frac{1}{30} = 0.033$. Для более нагляд-

ных результатов возьмем численность населения Китая на 2019 год, которая составляла 1,410 млрд человек. Время моделирования – 300 дней.

Предположим, что карантинные меры введены на двухсотый день эпидемии, и в пике достигают уменьшения в два раза возможного контакта с заразными. Длительность карантинных мер примем равной 200 дней. В качестве функции $\rho(t)$, отвечающей описанным условиям можно взять

$$\rho(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (0; 200] \cup [400; 600), \\ 0.5(0.01t - 3)^2 (2 - (0.01t - 3)^2), & \text{если } t \in (200; 400). \end{cases} \quad (3)$$

Проведя численный эксперимент, были получены следующие графики

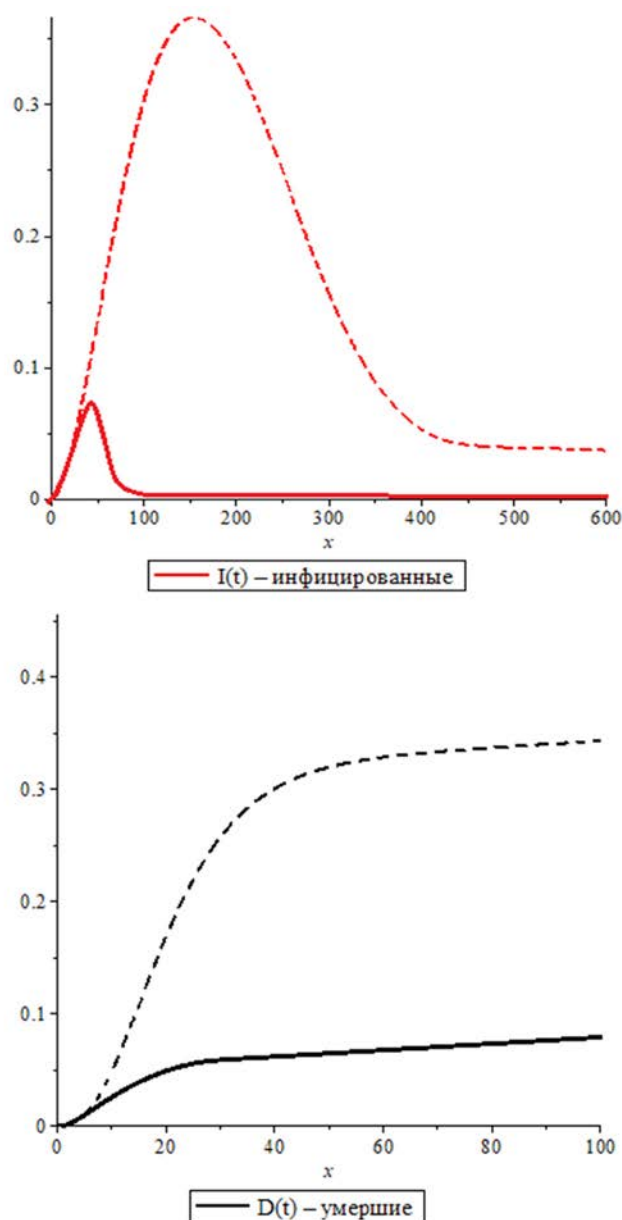


Рис. 3. Графики долей инфицированных и умерших в популяции, соответственно

На рисунках пунктирными линиями изображены графики при условии, что карантинные меры не были введены, и сплошными – при условии, что был введен карантин. По графиках можно увидеть, как изменилась картина распространения заболевания в случае введения карантинных мер. Как показывает численный эксперимент, введение описанных выше карантинных мер уменьшает долю инфицированных почти в 6 раз, а умерших примерно в 9 раз. Полученные результаты демонстрируют всю значимость введения карантинных мер.

Выводы. Представленные в работе математические модели эпидемиологии могут быть использованы при исследовании эпидемиологической обстановки в регионах и прогнозировании действенности карантинных мероприятий.

Список литературы

1. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Society of London. 1927. Vol. 115, № 772. P. 700–721.
2. McKendrick A. G. Application of Mathematics to Medical Problems // Proceedings of Edinburgh Mathematical Society. 1926. Vol. 115, № 772. P. 98–130.
3. Liao Z., Lan P. [et al.]. TW-SIR: time-window based SIR for COVID-19 forecasts // Sci Rep. 2020. Vol. 10.
4. Smith D., Moore L. The SIR Model for Spread of Disease // Convergence. 2004. № 12. P. 13–17.
5. Hethcote H. W. The Mathematics of Infectious Diseases // SIAM Review. 2000. Vol. 42, № 4. P. 599–653.

Математическая модель динамики развития лесонасаждений

Анна Андреевна Шалаева¹,
Татьяна Фанадовна Мамедова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева, Саранск, Россия

¹Liyaskinaa@mail.ru, ²mamedovاتف@yandex.ru

Аннотация. Решается задача создания математической модели развития лесонасаждений по Республике Мордовия. Получена математическая модель, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты предполагается использовать для дальнейшего исследования динамики развития лесонасаждений в Мордовии.

Ключевые слова: модель хищник-жертва, моделирование, параметры системы, характеристики древостоя

Mathematical model of forest development dynamics

Anna A. Shalaeva¹, Tatiana F. Mamedova²

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹Liyaskinaa@mail.ru, ²mamedovاتف@yandex.ru

Abstract. The paper solves the problem of creating a mathematical model for the development of forest plantations in the Republic of Mordovia. A mathematical model is obtained, which is described by a system of ordinary differential equations. The results obtained are supposed to be used for further research into the dynamics of the development of forest plantations in Mordovia.

Keywords: predator-prey model, modeling, system parameters, stand characteristics

В данное время особое внимание уделяется восстановлению и своевременному росту природных единиц лесного массива. Информация о состоянии и динамики лесных массивов является недостаточной и не отвечает современным требованиям экологического мониторинга, не дает точного ответа на вопрос какое количество древостоя возобновляется естественным путем, в какой момент времени необходимо привлекать человеческий ресурс.

Для выявления факторов, влияющих на выживаемость, воспроизводимость, рост, развитие, качество древостоя были проанализированы основные таксационные характеристики деревьев, в частности, возрастные. Выявлено, что деревья разных возрастов имеют определённую степень влияния в динамике численности и качества жизнедеятельности друг

друга, в частности, деревья разного возраста отличаются высотой, диаметром ствола, потребностью к свету и в целом доступностью к нему. Так, деревья старшего возраста оказывают сильное влияние на корневую систему подроста (деревьев младшего возраста). Сформулировали основные требования к модели и исходные данные для моделирования, поставлена концептуальная формулировка данной модели. В частности, важно, чтобы лесонасаждения развивались на замкнутой однородной территории, с одинаковым климатическими и не влияющие на нее географическими условиями, все лесные насаждения разных возрастных фигур равномерно распределены на этой территории. Конкуренция и преобладание отдельных видов популяций исключена. За основу построения математической модели были взяты уравнения Вольтерровского типа взаимодействия нескольких популяций [1–2]. Стоит отметить, что из наиболее сложных и актуальных проблем моделирования реальных процессов является определение параметров модели, чтобы наиболее точно отражали состояния и развитие системы.

Пусть $x_i(t)$ – количество деревьев в i -й возрастной группе в момент времени t , где $t = \overline{1, n}$, где n – количество классов разбиения.

Определим основные параметры, на основании которых будет построена непрерывная математическая модель. Пусть:

$\gamma_1(\psi_r)$ – функция, характеризующая интенсивность гибели деревьев разных возрастных групп;

$c_i = \text{const} > 0$ – интенсивность перехода деревьев в следующую возрастную группу;

$\omega(\sigma)$ – функция, характеризующая скорость появления молодых деревьев, где σ – отражает способность плодоношения деревьев, значение которого определяется численностями деревьев возрастных групп, способных давать семена, поэтому величина σ определяется суммой:

$$\sigma = \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{1..n}$ – отражает степень влияния деревьев старшей возрастной группы на появление молодых деревьев.

При описанных выше предположениях была получена модель, описывающая естественную динамику развития лесонасаждений n – возрастного леса и представленная следующей системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \omega(\sigma) - \gamma_1(\psi_1) x_1 - c_1 x_1, \\ &\dots \\ \frac{dx_i}{dt} &= c_{i-1} x_{i-1} - \gamma_i(\psi_i) x_i - c_i x_i, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = c_{n-2}x_{n-2} - \gamma_{n-1}(\psi_{n-1})x_{n-1} - c_{n-1}x_{n-1},$$

$$\frac{dx_n}{dt} = c_{n-1}x_{n-1} - hx_n.$$

Было принято разделить весь лесной массив на три возрастные категории: деревья старшего возраста, среднего и подросты. Количество классов разбиения примем значением равное трем ($n = 3$). В результате была получена следующая система дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y, z) - \gamma(z)x - gx, \\ \dot{y} &= gx - (q + r)y, \\ \dot{z} &= qy - az.\end{aligned}\tag{3}$$

где $x = x_1$ – древостой младшей группы деревьев (подросты), $y = x_2$ – средневозрастные деревья, $z = x_3$ – деревья старшей возрастной группы (перестой). $a(y, z)$ – функция, характеризующая скорость рождения деревьев младшего возраста, $\gamma(z)$ – функция гибели деревьев младшего возраста; r, h – коэффициенты гибели деревьев старшей возрастной групп (второй и третьей).

Полученная модель (2) позволяет описать динамику лесонасаждений. Дальнейшим шагом в исследование данной модели является анализ влияния человека на природу, как управляющего фактора, которое важно учитывать, как эффективный инструмент использования, так и потребление данных ресурсов.

Таким образом, данная модель в дальнейшем позволит исследовать устойчивость решений при постоянно действующих возмущениях, произвести численное моделирование системы, с целью нахождения параметров данной модели с элементами управления, выявление характерных режимов и исследование допустимости полученных результатов.

Список литературы

1. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А. Исследование математических моделей взаимодействия многовидовых сообществ // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании с участием зарубежных ученых : X конф. Саранск : СВМО, 2012. № 4 (14). С. 62–69.
2. Резниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Математические модели биологических продукционных процессов : учеб. пособие. М. : Изд-во МГУ, 1993. 302 с.
3. Чумаченко С. И. Моделирование динамики многовидовых разновозрастных лесных ценозов // Журнал общей биологии. 1999. Т. 59, № 4. С. 371–377.

УДК 510.6

Обзор основных стеганографических алгоритмов

Айтач Мубариз-кызы Байрамова¹,
Юлия Фридриховна Захарова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²olegzakharov@rambler.ru

Аннотация. Рассматриваются основные понятия стеганографического сеанса, его характеристики, схема канала и основные принципы реализации. Проводится обзор алгоритмов для «вложения» информации в изображения, таких как алгоритмы Каттера, Питаса, Рождена, PatchWork.

Ключевые слова: нейронная сеть, криптография, стеганография, криптографический сеанс

Overview of the main steganographic algorithms

Aytach Mubariz-kizi Bayramova¹, Yulia F. Zakharova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

²olegzakharov@rambler.ru

Abstract. The basic concepts of a steganographic session, its characteristics, the channel scheme and the basic principles of implementation are considered. A review of algorithms for "embedding" information in images, such as the algorithm of Cutter, Pitass, Rozhden, PatchWork algorithm is carried out.

Keywords: neural network, cryptography, steganography, cryptographic session

Разработкой методов преобразования (шифрования) информации с целью ее защиты от незаконных пользователей занимается криптография. Такие методы и способы преобразования информации называются шифрами. Шифрование – это процесс применения шифра к защищаемой информации, т.е. преобразование открытого текста в шифрованное сообщение (шифр текст, криптограмму) с помощью определенных правил, содержащихся в шифре. Дешифрование – это обратный шифрованию процесс, т.е. преобразование шифрованного сообщения в читаемую информацию с помощью определенных правил, содержащихся в шифре. Стеганография, в свою очередь, – это способ передачи или хранения информации с учетом сохранения в тайне самого факта такой передачи [4].

На сегодняшний день одним из наиболее актуальных трендов в развитии методов обеспечения информационной безопасности является разработка, совершенствование и использование методов компьютерной и цифровой стеганографии как эффективных инструментов для защиты конфиденциальных данных, организации скрытного защищенного хранения и передачи гетерогенных данных по открытым каналам коммуникации, защиты прав авторства и скрытного маркирования объектов цифрового и аналогового контента. Стеганография – искусство невидимой коммуникации. Цель стеганографии скрыть сам факт наличия связи. Это достигается путем внедрения скрытых сообщений в различную мультимедийную информацию – цифровые изображения, видео и звуковые файлы. Стеганографические методы расширяют и дополняют возможности традиционных криптографических методов. К числу практически значимых задач, решаемых при разработке новых методов и алгоритмов стеганографического скрытия информации (ССИ) необходимо отнести повышение робастности, увеличение визуальной и статистической незаметности скрытых данных, а также повышение пропускной способности (ПС) стеганографических каналов.

На рис. 1 представлена классическая схема стеганографического канала.

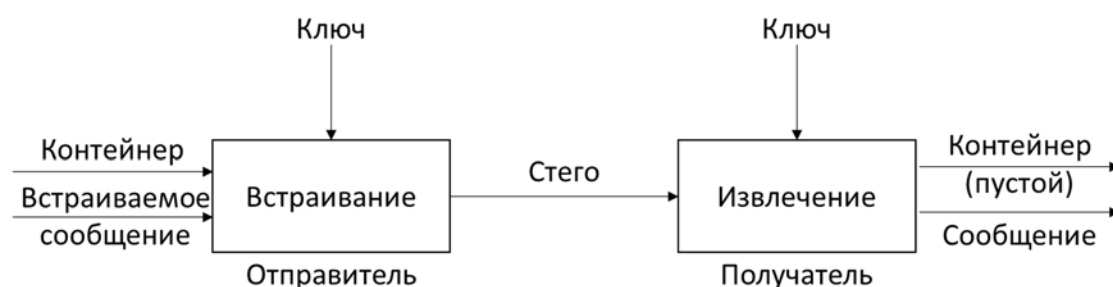


Рис. 1. Классическая схема стеганографического канала

Безопасность стегосистемы базируется на трех основных характеристиках.

Скрытность – невозможность обнаружения встроенных данных без дополнительной информации о параметрах встраивания. Скрытность можно охарактеризовать через устойчивость к различным методам стегоанализа (общим, специализированным, статистическим, нейросетевым).

Пропускная способность. Пропускная способность представляет собой критерий оценки количества информации, которую можно отправить с помощью стегоконтейнера. Пропускная способность измеряется в количестве информации, которая может быть вложена в один элемент контейнера или в одно слово (bits-per-word, bits-per-character, bpw(bpc)).

Устойчивость. Устойчивость к модификации контейнера с целью искажения, преднамеренного ввода ложных сообщений или разрушению встроенной в контейнер информации. Устойчивость также означает способность метода встраивания и извлечения не допускать, противостоять изменениям третьими лицами с помощью любых методов обработки. В этом случае стеганографии, если стегофайлы не подвергаются влиянию и не изменяются во время отправки, то это не считается атакой, и получатель получает стегофайл таким, каким он был отправлен. В противном случае такие атаки, как сжатие, преобразование формата файла и преобразование между цифровым и аналоговым форматом могут происходить во время процесса коммуникации.

Все современные алгоритмы встраивания информации в контейнеры должны обеспечивать робастность встраиваемых ЦВЗ. В частности, изображения-контейнеры со встроенными ЦВЗ должны предусматривать возможность сжатия контейнера любым из методов. Поэтому стего-алгоритмы учитывают свойства системы человеческого зрения аналогично алгоритмам сжатия изображений, и используют те же преобразования, что и в современных алгоритмах сжатия (дискретное косинусное преобразование в JPEG, вейвлет-преобразование в JPEG2000). Следовательно, вложение информации может производиться либо в исходное изображение, либо одновременно с осуществлением сжатия изображения-контейнера, либо в уже сжатое алгоритмом изображение.

Преимуществом алгоритмов встраивания данных в пространственной области является то, что ЦВЗ внедряется в области исходного изображения и нет необходимости выполнять вычислительно громоздкие линейные преобразования изображений. ЦВЗ внедряется за счет манипуляций яркостью или цветовыми составляющими.

Большинство алгоритмов встраивания ЦВЗ в пространственную область изображений основаны на использовании широкополосных сигналов (ШПС). Основной идеей применения ШПС в стеганографии является то, что данные внедряются в шумовой сигнал малой мощности. Так как сигнал малой мощности, то для защиты ЦВЗ применяют помехоустойчивые коды.

Алгоритм Каттера предполагает, что изображение имеет RGB кодировку. Встраивание выполняется в канал синего цвета, так как к синему цвету система человеческого зрения наименее чувствительна.

Пусть S_i – встраиваемый бит, $I = \{R, G, B\}$ – контейнер, $p = (x, y)$ – псевдослучайная позиция, в которой выполняется вложение. Секретный бит встраивается в канал синего цвета путем модификации яркости $l(p) = 0.299r(p) + 0.587g(p) + 0.114b(p)$,

$$b'(x) = \begin{cases} b(p) + ql(p), & s_i = 0 \\ b(p) - ql(p), & s_i = 1 \end{cases}$$

где q – константа, определяющая энергию встраиваемого сигнала. Ее величина зависит от предназначения схемы. Чем больше, тем выше робастность вложения, но тем сильнее его заметность. Извлечение бита получателем осуществляется без наличия у него исходного изображения, то есть вслепую. Для этого выполняется предсказание значения исходного, не модифицированного пикселя на основании значений его соседей.

Данный алгоритм не гарантирует всегда верного определения значения секретного бита, так как функция извлечения бита не является обратной функции встраивания. Алгоритм является робастным ко многим из известных атак: низкочастотной фильтрации изображения, его сжатию в соответствии с алгоритмом JPEG, обрезанию краев.

В алгоритме Питаса ЦВЗ представляет собой двумерный массив бит размером с изображение, причем число единиц в нем равно числу нулей. Существует несколько версий алгоритма, предложенного Питасом. Вначале предлагалось встраивать бит ЦВЗ в каждый пиксель изображения, но позже благоразумно было решено использовать для этой цели блоки размером 2x2 или 3x3 пикселя, что делает алгоритм более робастным к сжатию или фильтрации. ЦВЗ складывается с изображением:

$$l'(x, y) = l(x, y) + \alpha \cdot s(x, y).$$

В случае использования для внедрения блоков детектор ЦВЗ вычисляет среднее значение яркости этого блока. Отсюда появляется возможность неравномерного внедрения ЦВЗ в пиксели, т.е. величин $\alpha \neq const$. Таким образом можно получить ЦВЗ, оптимизированный по критерию робастности к процедуре сжатия алгоритмом JPEG. Для этого в блоке 8x8 элементов заранее вычисляют емкость каждого пикселя (с учетом ДКП и матрицы квантования JPEG). Затем ЦВЗ внедряют в соответствии с вычисленной емкостью. Эта оптимизация производится раз и навсегда, и найденная маска применяется для любого изображения.

В алгоритме Роджена также, как и в алгоритме Питаса, ЦВЗ представляет собой двумерную матрицу единиц и нулей с примерно равным их количеством. Пиксели, в которые можно внедрять единицы (т.е. робастные к искажениям), определяются на основе некоторой характеристической функции (характеристические пиксели). Эта функция вычисляется локально, на основе анализа соседних пикселей. Характеристические пиксели составляют примерно 1/100 от общего числа, так что не все единицы ЦВЗ встраиваются именно в эти позиции. Для повышения количества характеристических пикселей в случае необходимости предлагается осуществлять небольшое предискажение изображения. Детектор находит значения характеристических пикселей и сравнивает с имеющимся у него ЦВЗ. Если в изображении ЦВЗ не содержится, то

в характеристических пикселях количество единиц и нулей будет примерно поровну.

В основе алгоритма Patchwork лежит статистический подход. Вначале псевдослучайным образом на основе ключа выбираются два пикселя изображения. Затем значение яркости одного из них увеличивается на некоторое значение (от 1 до 5), значение яркости другого – уменьшается на то же значение. Далее этот процесс повторяется большое число раз (~ 10 000) и находится сумма значений всех разностей. По значению этой суммы судят о наличии или отсутствии ЦВЗ в изображении.

Значения выбираемых на каждом шаге пикселей – a_i и b_i , величина приращения – δ . Сумма разностей значений пикселей

$$S_n = \sum_{i=1}^n [(a_i + \delta) - (b_i - \delta)] = 2\delta n + \sum_{i=1}^n (a_i - b_i).$$

Матожидание величины $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)$ (суммы разности значений пикселей в незаполненном контейнере) близко к нулю при достаточно большом n . Матожидание величины S_n будет больше 2δ . S_n имеет гауссовское распределение. В стегодетекторе в соответствии с ключом проверяется значение и в том случае, если она значительно отличается от нуля, выносится решение о наличии ЦВЗ. Для повышения робастности алгоритма вместо отдельных пикселей можно использовать блоки, или patches (отсюда и название алгоритма). Использование блоков различного размера может рассматриваться как формирование спектра вносимого ЦВЗ шума (шейпинг), аналогично тому, как это применяется в современных модемах.

Алгоритм Patchwork является достаточно стойким к операциям сжатия изображения, его усечения, изменения контрастности. Основным недостатком алгоритма является его неустойчивость к аффинным преобразованиям, то есть поворотам, сдвигу, масштабированию. Другой недостаток заключается в малой пропускной способности. Так, в базовой версии алгоритма для передачи 1 бита скрытого сообщения требуется 20 000 пикселей [3].

Список литературы

1. Грибунин В. Г., Оков И. Н., Туринцев И. В. Цифровая стеганография. М. : Солон-Пресс, 2002. 272 с.
2. Новиков Е. А., Шитов Ю. А. Криптографические методы защиты информации : учеб. пособие. Красноярск : Федеральное агентство по образованию Сибирский Федеральный Университет, 2008. 178 с.
3. Хорошко В. А., Чекатков А. А. Методы и средства защиты информации. Киев : Юниор, 2003. 504 с.
4. Kutter M., Jordan F., Bossen F. Digital signature of color images using amplitude modulation // Proceedings of the SPIE (Storage and Retrieval for Image and Video Databases V). 1997. Vol. 3022. P. 518–526.

Десятая проблема Гильберта и искусственный интеллект

Илья Владимирович Бойков¹, Алла Ильинична Бойкова²,
Юлия Михайловна Горшкова³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹boikov@pnzgu.ru, ²aiboikova@pnzgu.ru, ³yuliya.gorshkova.2510@mail.ru

Аннотация. Представлена точка зрения на соотношение между творческой деятельностью человека и искусственным интеллектом, согласно которой творческая деятельность человека при решении математических проблем не может быть сведена к машинным операциям. Это утверждение основано на постулате Тьюринга – Черча, краткое обоснование которого (на основе машин Тьюринга) приведено в статье.

Ключевые слова: десятая проблема Гильберта, диофантовы уравнения, алгоритмическая разрешимость, машина Тьюринга

Hilbert's tenth problem and artificial intelligence

Ilya V. Boykov¹, Alla I. Boykova², Yulia M. Gorshkova³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia
¹boikov@pnzgu.ru, ²aiboikova@pnzgu.ru, ³yuliya.gorshkova.2510@mail.ru

Abstract. The article presents a point of view on the relationship between human creative activity and artificial intelligence, according to which human creative activity in solving mathematical problems cannot be reduced to machine operations. This statement is based on the Turing-Church postulate, a brief justification of which (based on the Turing machines) is given in the article.

Keywords: hilbert's tenth problem, Diophantine equations, algorithmic solvability, Turing machine

Введение

На II Международном конгрессе математиков, проходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 г., Д. Гильбертом был произнесен знаменитый доклад <Математические проблемы> [1], который во многом определил развитие математики в XX в. В докладе Д. Гильберта были сформулированы 23 проблемы, касающиеся всех областей математики: теории множеств (континуум-проблема), обоснования математики, геометрии, алгебры, алгебраической геометрии, теории чисел, математического анализа, дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.

Среди сформулированных 23-х проблем 10-я проблема звучала так: «Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами. Требуется указать общий метод, согласно которому можно было бы в конечное число шагов узнать имеет данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет».

История математических конгрессов насчитывает 127 лет. Традиционно они проводятся один раз в четыре года. По-видимому, самый знаменитый из них состоялся в августе 1900 г. в Париже. На этом конгрессе в секции преподавания и методологии математики 38-летний Давид Гильберт сделал свой знаменитый доклад, в котором сформулировал 23 проблемы, которые считал наиболее значимыми для математики начинающегося XX столетия. Эти проблемы оказали существенное влияние на математику XX столетия. Часть из них оказалось нерешенной до настоящего времени. До сих пор не решены две знаменитые проблемы Гильберта: одна из них о нулях дзета-функции Римана (8-я проблема), вторая о предельных циклах (16-я проблема).

На рубеже XX–XXI столетий были сформулированы 10 проблем, которые XX век передал XXI [2]. Среди них числится проблема о нулях дзета-функции Римана. Из 10-ти сформулированных в [2] проблем к настоящему времени решена только одна проблема. Григорий Перельман решил проблему Пуанкаре.

Замечание. Диофант Александрийский, древнегреческий математик. Его возраст зашифрован следующим диофантовым уравнением

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4,$$

т.е. $x = 84$.

(Дата рождения: не ранее 201г. и не позднее 285 г.

Дата смерти: не ранее 285 г. и не позднее 299 г.)

Решение диофантовых уравнений вызвало живой интерес у математиков, начисная с античных времен и до настоящего времени [3].

Решение диофантовых уравнений – это решение алгебраических уравнений с целыми коэффициентами в целых числах.

Целочисленными решениями алгебраических уравнений интересовались еще античные математики. Теорема Пифагора способствовала исследованию уравнений вида $x^2 + y^2 = z^2$. Эвклид нашел формулу, дающую все целочисленные решения этого уравнения. Сам Диофант нашел решения уравнений и системы уравнений второй степени с двумя неизвестными. Знаменитая проблема Ферма $x^n + y^n = z^n$ $n > 2$, также относится к диофантовым уравнениям. (Ферма выдвинул гипотезу о

том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не имеет целочисленных решений). Проблема Ферма была решена в 1994 г. Эндрю Джоном Уайлсом. В 2016 г. за доказательство Великой теоремы Ферма ему была присуждена Абелевская премия.

В XVI–XX вв. диофантовыми уравнениями занимались выдающиеся ученые: Ферма, Валлис, Эйлер, Лагранж, Гаусс. Однако, несмотря на усилия многих поколений математиков, проблема решения диофантовых уравнений оставалась открытой.

Это обстоятельство привело к постановке Гильбертом его 10-й проблемы. Вначале проблема была сформулирована в терминах диофантовых уравнений, а затем обобщена и представлена как проблема алгоритмической разрешимости.

Проблема алгоритмической разрешимости (так называется 10-я проблема Гильберта) была частично поставлена Гильбертом в 1900 г. на Парижском конгрессе математиков и позднее на международном конгрессе в 1928 г.

В первоначальной постановке десятая проблема Гильберта состоит в построении алгоритма, применяемого к любому диофантову уравнению вида $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, где f – полином с целочисленными коэффициентами, и позволяющего за конечное число шагов определить, есть ли у этого уравнения решение в целых числах.

Эта постановка задачи привлекла внимание математиков к проблеме формализации понятия алгоритма. Усилиями К. Геделя, Э. Поста, А. Черча и А. Тьюринга понятие алгоритма было формализовано. После этого усилиями М. Дэвиса, Х. Путнама, Дж. Робинсона, Ю. В. Матиясевича было доказано, что такого алгоритма не существует.

При работе над 10-й проблемой А. Тьюринг и А. Черч создали методы исследования далеко выходящие за рамки исследования диофантовых уравнений. Алан Тьюринг разработал математический аппарат, так называемые машины Тьюринга, позволяющие моделировать любые вычислительные процессы, А. Черч построил лямбда-вычисление Черча.

Для решения 10 проблемы Гильберта необходима точная формулировка универсального определения алгоритма. В 30-тые годы прошлого столетия было предложено несколько альтернативных формулировок понятия алгоритма, из которых, по мнению Р. Пенроуза [4], «наиболее емкая и убедительная – и к тому же, наиболее значимая в историческом плане опирается на понятие машины Тьюринга».

Машина Тьюринга принадлежит области абстрактной математики и не является физическим объектом.

Тьюринг рассматривал весьма общую проблему алгоритмической разрешимости, поставленную Д. Гильбертом на международном конгрессе 1928 г. в Болонье, и являющуюся обобщением его 10-й проблемы.

Проблема состояла в отыскании универсальной алгоритмической процедуры для решения математических задач или, по крайней мере, получении ответа о принципиальной возможности такого решения. Кроме того, Д. Гильберт сформулировал программу построения математики на фундаменте аксиом и правил вывода. Несостоятельность этой программы была доказана А. Черчем еще до того, как А. Тьюринг начал работу над проблемой алгоритмической разрешимости. Проблема над которой начал работать А. Тьюринг заключалась в следующем [4]: «существует ли некоторая механическая процедура, позволяющая, в принципе, решить все математические задачи (из некоторого вполне определенного класса) одну за другой?» Такая постановка не зависит от какого-то ни было конкретного построения математики в терминах аксиоматической системы.

Основной трудностью было построение «механической процедуры». В качестве таковой А. Тьюринг построил модель вычислительного устройства, выполняющего арифметические и логические операции, так называемую машину Тьюринга. (Необходимо отметить, что машина Тьюринга может моделировать современные компьютеры с архитектурой фон Неймана.) Следовательно, машины Тьюринга выполняют любые механические операции. Если некоторая последовательность операций четко определена, то найдется машина Тьюринга, способная ее выполнить. Это известный тезис Чёрча – Тьюринга, который утверждает, что машина Тьюринга определяет то, что в математике понимают под алгоритмической разрешимостью (или выполняемой, или рекурсивной, или механической процедурой). Проблема вычислимости относится не только к числам. Машины Тьюринга могут оперировать с математическими формулами и термин механические процедуры относится к алгебре, математическому анализу и другим областям математики. Таким образом, машины Тьюринга являются математическим аппаратом для решения проблемы алгоритмической разрешимости в самой широкой постановке.

Проблема алгоритмической разрешимости непосредственно связана с проблемой остановки машины Тьюринга. Вопрос ставится следующим образом. Остановится ли n -я машина Тьюринга, решающая m -ю задачу. Если машина останавливается, то задача алгоритмически разрешима. Если машина не останавливается, то возможны различные ситуации: а) задача алгоритмически неразрешима; б) машина никогда не останавливается (например, отсутствует команда «Стоп»). Если n -я машина Тьюринга не останавливается, решая m -ю задачу, то это отмечается [4] отдельным знаком

$$T_n(m) = \Delta.$$

Замечание. Так как каждая машина Тьюринга состоит из конечного числа кодирующих ее символов, то имеется счетное множество

машин Тьюринга, которые можно пронумеровать натуральными числами. Аналогично множество задач, относящихся к определенному направлению математики, также можно пронумеровать множеством натуральных чисел. Поэтому множество $T_n(m), n, m = 1, 2, \dots$, включает в себя результаты решения всех задач $m, m = 1, 2, \dots$ на всех машинах $T_n, n = 1, 2, \dots$.

В упрощенном виде исследование А. Тьюринга можно представить следующим образом. Имеется достаточно содержательный круг математических задач. Требуется определить существует ли механическая процедура позволяющая установить алгоритмическую разрешимость этих задач. Механическая процедура заключается в следующем. Если машина Тьюринга, предназначенная для решения данной задачи, останавливается после конечного числа шагов (действий), то тем самым доказываемое существование алгоритма решения задачи. В противном случае – не существует конечного алгоритма. Задача является алгоритмически неразрешимой.

Вопрос ставится следующим образом [4]: существует ли алгоритмическая процедура для решения полностью механическим путем общей проблемы – проблемы остановки – остановится ли n -я машина Тьюринга, решая m -ю задачу. Если такой алгоритм существует, то существует и машина Тьюринга, реализующая этот алгоритм.

Решение об алгоритмической разрешимости или неразрешимости исследуемой задачи должна выдать одна из машин Тьюринга. Всего имеется счетное число машин Тьюринга. Каждую математическую задачу можно записать в виде конечного набора натуральных чисел. Таким образом, имеется два счетных множества – множество машин Тьюринга и множество задач, представленных к решению. Модификацией диагонального метода Кантора, используемого последним в исследованиях по теории множеств, Тьюринг доказывает, что существует задача, на которую ни одна из машин Тьюринга не может дать ответ по поводу ее алгоритмической разрешимости или неразрешимости. Доказана алгоритмическая неразрешимость математических задач.

Практически одновременно задача о логарифмической неразрешимости была решена принципиально различными методами К. Гёделем, А. Чёрчем, А. Тьюрингом. Остановимся на подходе К. Гёделя, результаты которого допускают эффектную иллюстрацию в рамках метода математической индукции.

Суть теоремы Гёделя заключается в следующем. Если справедлива процедура P , то найдется задача $G(P)$, использующая процедуру P , для которой эта процедура приводит к ошибочному результату. Поразительный пример, основанный на методе математической индукции и иллюстрирующий это утверждение, приведен Р. Пенроузом [4]. Он

заключается в следующем. Р. Пенроуз берет целое число, скажем 581, и представляет его в виде степеней числа «2»:

$$581 = 2^{2^{2+1}+1} + 2^{2^2+2} + 2^2 + 1.$$

Затем в правой части предыдущего равенства основание «2» заменяется на «3» и из полученного числа вычитается 1. В результате имеем:

$$3^{3^{3+1}+1} + 3^{3^3+3} + 3^3.$$

Эта процедура – замена основания на следующее натуральное число и вычитание единицы из полученного числа повторяется на каждом шаге алгоритма. Нетрудно видеть, что все требования для проверки метода математической индукции выполнены. Последовательность вычисляемых чисел неуклонно увеличивается. Можно предположить, что этот процесс никогда не закончится. Однако, это не так. В конце вычислений мы получаем НУЛЬ! Потрясающий результат! Он следует из теоремы Гудвина [5]

Из результатов работ К. Гёделя, А. Чёрча, А. Тьюринга Р. Пенроуз делает вывод, что творческая работа при решении математических задач (а также любая интеллектуальная деятельность) далеко выходит за рамки вычислительных (в широком смысле) действий. Он полагает, что творческий процесс связан с квантовыми эффектами в мозге. Более того, предполагается, что эти процессы происходят в микротрубках нейронов мозга [6].

Пенроуз и Хамерофф большое внимание уделяют особым микротрубкам, находящимся в нейронах мозга, и считают, что именно в них происходят квантовые процессы, которые объясняют непредсказуемость человеческих мыслей. Идеи Пенроуза и Хамероффа легли в основу нового направления в психологии – квантовой психологии. Теория квантовой психологии зародилась в 90-е гг. XX в. Её сторонники считают, что поведение людей необъяснимо с точки зрения классической науки: его невозможно предсказать и интерпретировать на основе лишь химических и физических реакций. Поэтому последователи направления предлагают применять в отношении человеческого разума принципы квантовой механики.

Принципы квантовой психологии являются объектом многочисленных дискуссий между ее сторонниками и противниками. В настоящее время имеются экспериментальные факты, как в поддержку этой теории так и против нее.

Список литературы

1. Проблемы Гильберта / под ред. П. С. Александрова. М. : Наука, 1969. 240 с.
2. The Millennium Price Problems. Clay Mathematics Institute, 1998.

3. Dickson L. E. History of Theory of Numbers. Vol. 2. Diophantine Analysis. Washington : Carnegie Institution of Washington, 1919. 803 p.
4. Пенроуз Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. М. : Изд-во ЛКИ, 2008. 400 с.
5. Goodstein R. L. On the Restricted Ordinal Theorem // The Journal of Symbolic Logic. 1944. Vol. 9, № 2. P. 33–41.
6. Hameroff S. R., Penrose R. Conscious events as orchestrated space-time selections // J. Consciousness Studies. 1996. Vol. 3. P. 36–63.

Абстрактный конечный автомат выгрузки сообщений

Евгений Сергеевич Калабкин¹,
Татьяна Фанадовна Мамедова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева, Саранск, Россия
¹e.kalabkin@gmail.com, ²mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. Представлена разработка алгоритма, направленного на устойчивую выгрузку сообщений из приложения-мессенджера во внешнюю систему. Алгоритм отвечает потребностям эффективной выгрузки сообщений, улучшения доступности данных.

Ключевые слова: алгоритм, мессенджер, выгрузка, внешняя система, оптимизация хранения, доступность данных

Abstract state machine for unloading messages

Evgeniy S. Kalabkin¹, Tatiana F. Mamedova²

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia
¹e.kalabkin@gmail.com, ²mamedovatf@yandex.ru

Abstract. The development of an algorithm aimed at stable unloading of messages from a messenger application to an external system is presented. The algorithm meets the needs of efficient unloading of messages, improving data availability.

Keywords: algorithm, messenger, unloading, external system, storage optimization, data availability

Введение

Разработка алгоритма для устойчивой выгрузки сообщений из мессенджера во внешнюю систему важна по нескольким причинам:

Доступность и переносимость данных: выгрузка сообщений во внешнюю систему позволяет пользователям получать доступ к своим беседам с различных устройств или платформ. Это облегчает бесшовную синхронизацию и гарантирует, что сообщения останутся доступными, даже если приложение мессенджера недоступно или было удалено. Пользователи могут легко переключать устройства или платформы, сохраняя историю сообщений, что способствует доступности и переносимости данных.

Резервное копирование и восстановление данных: выгрузка сообщений во внешнюю систему обеспечивает механизм резервного копирования для сохранения важных разговоров. Это помогает защитить

данные от случайного удаления, потери устройства или сбоев в работе приложений. Храня сообщения во внешней системе, пользователи получают надежную резервную копию, которая позволяет восстановить данные в случае чрезвычайных ситуаций или потери данных, обеспечивая устойчивость и непрерывность данных.

Функциональная совместимость и интеграция: алгоритм выгрузки обеспечивает функциональную совместимость и интеграцию с другими приложениями и системами. Передавая сообщения во внешнюю систему, пользователи могут использовать сторонние сервисы, инструменты анализа или архивные системы. Это расширяет возможности интеграции данных обмена сообщениями с другими приложениями, обеспечивая расширенную аналитику, управление соответствием нормативным требованиям или специализированные рабочие процессы.

Долгосрочное хранение данных: в некоторых случаях, например, в соответствии с юридическими или нормативными требованиями, необходимо длительное хранение данных. Разработка алгоритма выгрузки облегчает архивирование и хранение сообщений за пределами ограничений приложения-мессенджера. Сообщения могут храниться во внешней системе безопасно и надежно, обеспечивая соблюдение политики хранения данных и поддерживая юридические обязательства.

Основная часть

Рассмотрим популярные мессенджеры, используемые на территории РФ.

WhatsApp, Telegram и ВКонтакте (VK) имеют различные архитектуры API и функциональные возможности, что может привести к различиям в их подходах к загрузке сообщений во внешнюю систему. Тем не менее, в общих концепциях и функциональных возможностях имеются некоторые сходства.

Загрузка и обработка мультимедиа:

Поскольку все платформы поддерживают различные типы медиа, такие как изображения, видео и документы, их API предоставляют механизмы для загрузки медиафайлов во внешнюю систему. Это может включать отправку медиафайлов в формате multipart/form-data или предоставление URL-адресов для загрузки медиаконтента во внешнюю систему.

Пакетная обработка или массовая загрузка:

API этих платформ предлагают функции для массовой выгрузки или пакетной обработки сообщений. Это позволяет разработчикам загружать сразу несколько сообщений, сокращая количество запросов к API и оптимизируя процесс загрузки.

Обработка ошибок и коды ответов:

Сходства состоят в том, как эти платформы обрабатывают ошибки и предоставляют коды ответов в своих API. Это может включать возврат

определенных кодов ошибок или сообщений об ошибках, указывающих на проблемы с загрузкой сообщений, например, сбой аутентификации, недопустимые форматы сообщений.

Алгоритм выгрузки должен отвечать следующим требованиям:

1. Исключение выгрузки дубликатов сообщений при повторном исполнении.

2. Устойчивость к сетевым и API ошибкам.

3. Универсальность использования для различных мессенджеров.

На рис. 1 представлена абстрактная реализация конечного автомата выгрузки, отвечающий перечисленным требованиям.

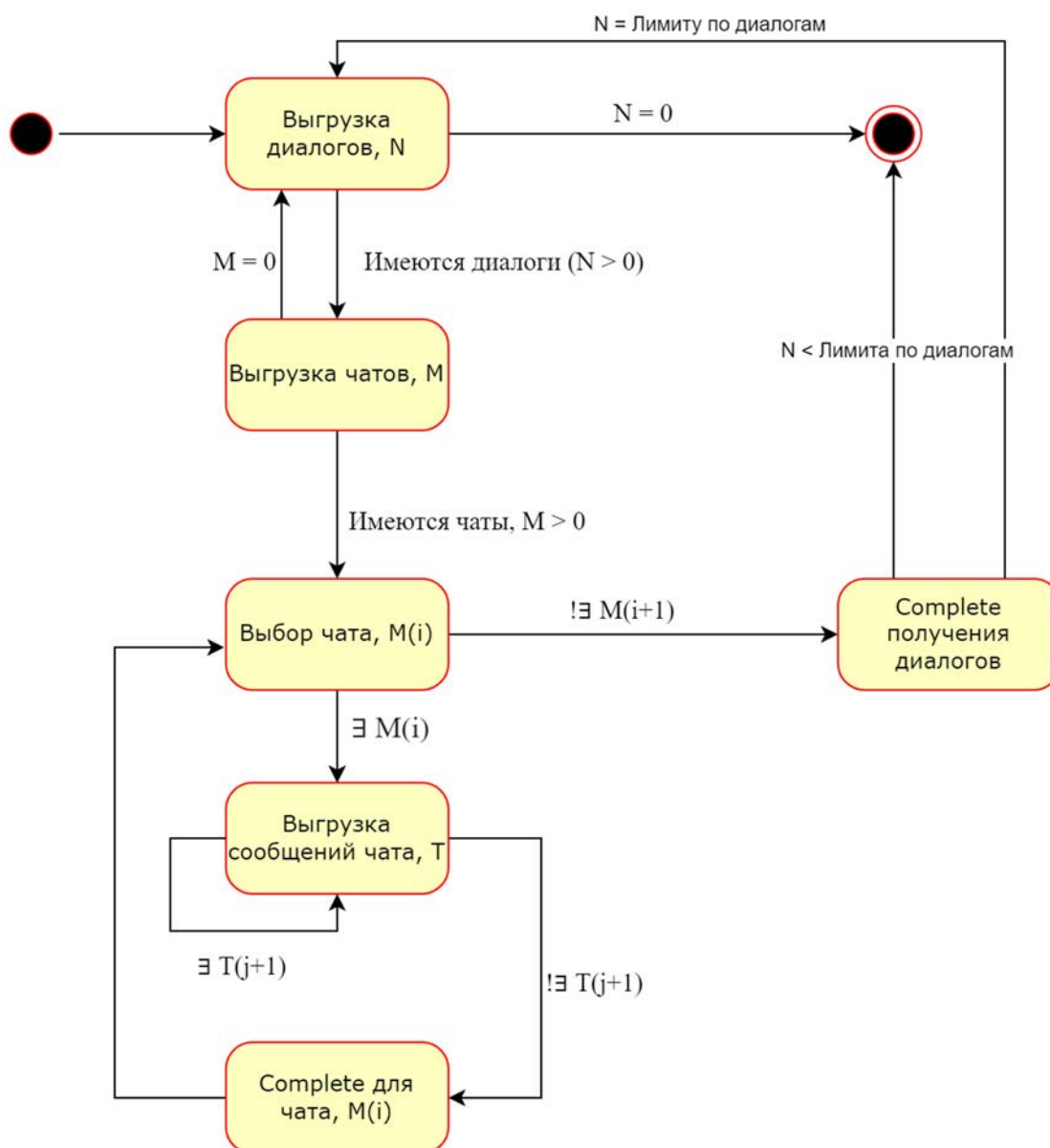


Рис. 1. Абстрактный конечный автомат выгрузки сообщений.

В алгоритме фигурируют такие сущности как: диалоги, чаты, сообщения.

Диалоги введены по причине возможного отсутствия фильтрации определенного типа чатов. Например, Telegram не позволяет при получении списка диалогов задать фильтрацию по типам чатов.

Заключение

В заключение следует отметить, что представленный алгоритм выгрузки сообщений из мессенджеров во внешнюю систему предлагает перспективное решение для решения проблем оптимизации хранения, доступности. Алгоритм учитывает различные факторы, такие как возраст сообщений, их актуальность, чтобы обеспечить эффективную выгрузку сообщений. Благодаря плавной передаче старых или менее актуальных сообщений во внешнюю систему освобождается ценное пространство для хранения внутри приложения мессенджера, что позволяет повысить производительность и удобство работы пользователей.

Алгоритм выгрузки сообщений из мессенджеров во внешнюю систему вносит ценный вклад в решение проблем с хранением и устойчивостью. Его реализация открывает перспективы для платформ обмена сообщениями, стремящихся оптимизировать использование хранилища, повысить производительность и продвигать экологически безопасные методы. Внедрив этот алгоритм, службы обмена сообщениями могут повысить удовлетворенность пользователей, обеспечить доступность данных и добиться значительных успехов на пути к более экологичной и эффективной экосистеме обмена сообщениями.

Математическое моделирование динамики нейронных сетей при заболеваниях нервной системы

Мария Андреевна Кутыркина¹,
Татьяна Фанадовна Мамедова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, Саранск, Россия
¹mariahkutyrkina@yandex.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача построения математической модели биологической нейронной сети на основе модели Ходжкина – Хаксли. Особое внимание уделяется исследованию изменения входного тока на нейронах, от которого зависит способность нейронов к обучению и запоминанию информации.

Ключевые слова: математическая модель, нейроны, модель Ходжкина – Хаксли, нейронная сеть, ионные каналы, воротные переменные

Mathematical modeling of the dynamics of neural networks in diseases of the nervous system

Maria A. Kutyrkina¹, Tatiana F. Mamedova²

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia
¹mariahkutyrkina@yandex.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Abstract. The paper considers the problem of constructing a mathematical model of a biological neural network based on the Hodgkin-Huxley model. Particular attention is paid to the study of changes in the input current on neurons, which determines the ability of neurons to learn and remember information.

Keywords: mathematical model, neurons, Hodgkin-Huxley model, neural network, ion channels, gate variables

Актуальность проблемы. Математическое моделирование динамики нейронных сетей является важным инструментом изучения механизмов заболеваний нервной системы. В частности, это позволяет нам исследовать, как изменения в структуре и функции нейронных сетей могут привести к различным неврологическим заболеваниям, таким как, например, болезнь Паркинсона.

В среднем мозге имеется особая группа нейронов – так называемая черная субстанция. Их отростки достигают других отделов головного мозга, прежде всего полосатого тела (стриатума). Здесь они выделяют дофамин, сигнальную молекулу, которая регулирует работу мышц.

Если его синтез и метаболизм в норме, мышцы своевременно сокращаются и расслабляются, если нет, то их тонус повышен [1].

Гибель нейронов черной субстанции приводит к постоянной нехватке дофамина и, как следствие, тяжелому нарушению двигательной функции – болезни Паркинсона. Его симптомами являются проблемы с координацией, скованность движений, медлительность, сутулость, тремор конечностей. Нейроны головного мозга при болезни Паркинсона взаимодействуют иначе, чем у здорового человека. Отмечается снижение способности нейронов к синаптической пластичности и изменение проводимости калиевых и натриевых каналов в нейронах головного мозга [2].

Описание модели. Для моделирования динамики нейронных сетей была использована модель Ходжкина-Хаксли.

Классическая модель Ходжкина-Хаксли описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m \frac{dV}{dt} = I_{ext} + I_{syn}(t) - G_{Na} - G_K - G_L ; \\ \frac{dm}{dt} = \alpha(V)(1-m) - \beta_m(V)m; \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h; \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n; \end{array} \right.$$

$$\alpha_m(V) = \frac{0.1(25-V)}{\frac{\exp(25-V)}{10} - 1}; \quad \alpha_n(V) = \frac{0.01(10-V)}{1 + \exp\left(\frac{10-V}{10}\right)};$$

$$\beta_m(V) = 4 \exp\left(-\frac{V}{18}\right); \quad \beta_n(V) = 0.125 \exp\left(-\frac{V}{80}\right);$$

$$\alpha_h(V) = 0.07 \exp\left(-\frac{V}{20}\right); \quad G_{Na} = g_{Na} m^3 h (V - V_{Na});$$

$$\beta_h(V) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{30-V}{10}\right)}; \quad G_K = g_K n^4 (V - V_K);$$

$$G_L = g_L (V - V_L).$$

В этой системе дифференциальных уравнений $V(t)$ – мембранный потенциал, $m(t)$, $h(t)$, $n(t)$ – так называемые воротные переменные: m , n – активационные переменные для калиевых и натриевых каналов, h – инактивационная переменная натриевых каналов. Воротные переменные – это вероятности открытия или закрытия ионных каналов

в мембране нейрона. Остальные параметры известны и вычисляются эмпирически, например, C_m – мембранная емкость [3].

Проводимости калиевых и натриевых каналов при болезни отличаются от нормы. Так проводимость натриевых каналов увеличивается со 120 мСм до 150 мСм, а проводимость калиевых каналов, напротив, уменьшается с 36 мСм до 18 мСм.

Реализация модели. Данная модель была реализована в среде разработки Google Colaboratory. Преимуществами этой среды являются высокая вычислительная скорость и возможность использования Python-библиотек для анализа данных онлайн. При программировании использовались библиотеки NumPy, предоставляющая широкие возможности для численного моделирования, и Matplotlib, позволяющая визуализировать полученные данные.

На рис. 1 представлен график колебаний мембранного потенциала с течением времени здорового человека, на рис. 2 – человека с болезнью, построенные на основе модели Ходжкина Хаксли при следующих параметрах: количество возбуждающих нейронов – 200, количество тормозящих нейронов – 50.

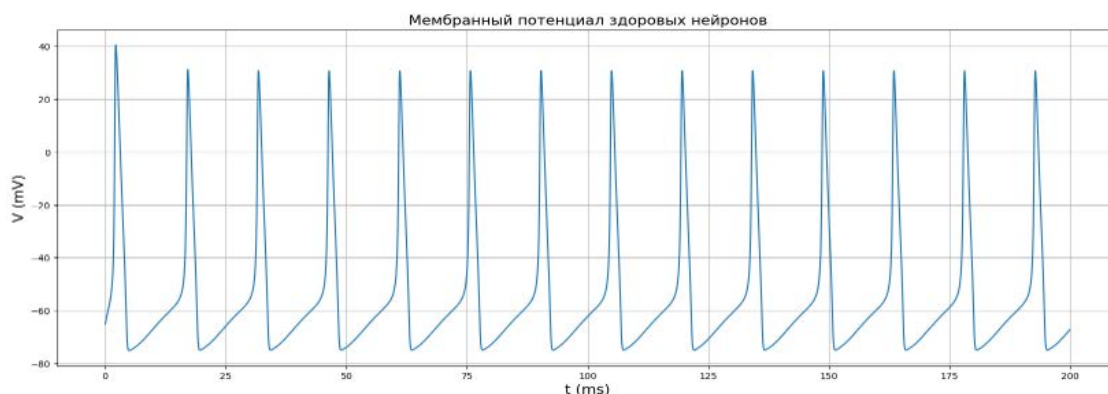


Рис. 1. Зависимость мембранного потенциала от времени по модели Ходжкина-Хаксли для здорового человека

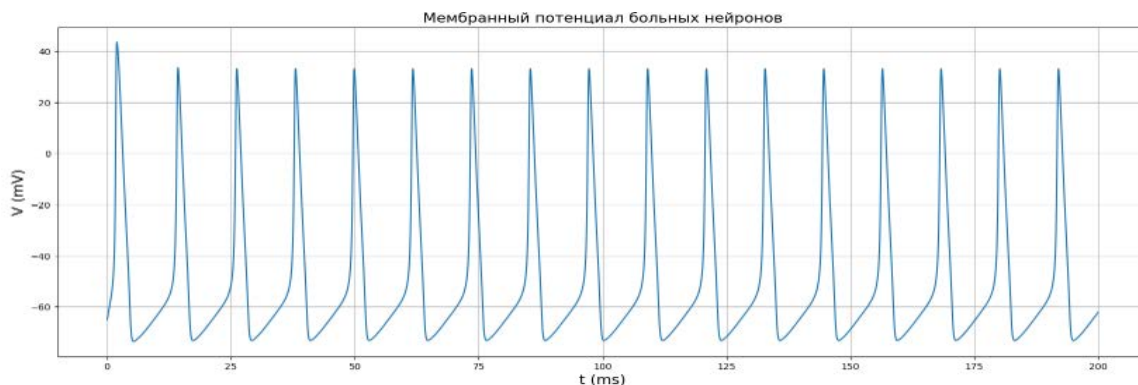


Рис. 2. Зависимость мембранного потенциала от времени по модели Ходжкина-Хаксли для больного человека

Заключение. При болезни изменяются проводимости калиевых и натриевых каналов в мембранах нейронов. Это приводит к увеличению числа нейронов, генерирующих импульсы мембранного потенциала, что проявляется в более высокой частоте колебаний и уменьшении амплитуды импульсов на графике мембранного потенциала при болезни. Этим объясняются такие симптомы больных, как дрожь и нарушение координации.

Полученные данные и дальнейшие исследования в этой области могут помочь разработать новые методы лечения и улучшить диагностику заболеваний нервной системы.

Список литературы

1. Никифоров А. С., Гусев Е. И. Общая неврология : учеб. пособие. М. : ГЭОТАР-Медиа, 2007. 720 с. URL: <https://www.rosmedlib.ru/book/ISBN9785970405154.html> (дата обращения: 02.06.2022).
2. Буркова Е. Д., Иванова Н. В., Иванова Ю. В. Механизмы развития болезни Паркинсона и стратегии терапии // Нервные болезни. 2016. Т. 6, № 1. С. 10–16.
3. Hodgkin A. L., Huxley A. F. Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of *Loligo* // J Physiol. 1952. Vol. 116 (4). P. 449–472.

Поиск гиперо-гипонимических отношений языка с использованием библиотек машинного обучения

Никита Андреевич Переломов¹,
Дмитрий Викторович Тарасов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹nikitaperelomov2@gmail.com, ²tarasovdv@mail.ru

Аннотация. Обсуждаются возможности библиотек машинного обучения языка Python: word2vec, FastText, RuWordNet в задаче поиска связи общего (гиперонима) и частного (гипонима) между словами русского языка. Рассматривается вариант поиска гиперо-гипонимических отношений для слов, не входящих в тезаурус RuWordNet.

Ключевые слова: машинное обучение, Python, гипероним, гипоним, RuWordNet

Search for hyper-hyponymic relations of a language using a machine learning library

Nikita A. Perelomov¹, Dmitriy V. Tarasov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia
¹nikitaperelomov2@gmail.com, ²tarasovdv@mail.ru

Abstract. The possibilities of Python machine learning libraries are discussed: word2vec, Fast Text, RuWordNet in the task of finding a connection between a general (hyperonym) and a private (hyponym) between words of the Russian language. A variant of searching for hyper-hyponymic relations for words not included in the RuWordNet thesaurus is considered.

Keywords: machine learning, Python, hyperonym, hyponym, RuWordNet

Гиперонимические отношения между словами присутствуют во многих языках, их использование позволяет более точно описывать объекты и явления в мире. В научных текстах, таких как учебники, термины и определения, где употребляются гиперонимы позволяют облегчить понимание и навигацию в обширных областях знаний.

Гиперонимы – это слова, которые выражают более общий или широкий класс объектов, чем другие слова. Они являются противоположностью гипонимов, которые выражают более конкретные элементы из класса. Гиперонимы могут использоваться для описания связей между понятиями, особенно в технических и научных текстах [1].

Например, слово «мебель» является гиперонимом для таких слов, как «стол», «кресло», «диван» и т.д. в связи с тем, что описывает широкий класс объектов, которые относятся к предметам мебели. Также слово «животное» является гиперонимом для таких слов, как «кошка», «собака», «лошадь» и т.д., поскольку охватывает более широкий класс всех живых существ.

Наиболее значимые библиотеки языка Python используемые в обработке языка

Обзор существующих библиотек языка Python начнем с word2vec, модель которого предложена в 2013 году. Word2Vec – это библиотека для создания векторного представления слов. Она основывается на нейронной сети прямого распространения и использует методы оптимизации для обучения векторных представлений. Преимущества word2vec в том, что она может работать с огромными корпусами текстов и предоставляет точные векторные представления слов. Недостатки заключаются в том, что для достижения высокой точности требуется большой объем данных для обучения [2, 3].

Состав библиотеки word2vec основан на двух моделях: Continuous Bag of Words (CBOW) и Skip-gram. Модель CBOW пытается предугадать центральное слово на основе контекста, а Skip-gram модель наоборот – старается предугадать контекст на основе центрального слова (рис. 1). Эти модели делятся на две категории: negative sampling (NS) и hierarchical softmax (HS). Метод NS решает задачу классификации на бинарный вопрос, а метод HS использует иерархический подход для решения этой же задачи.

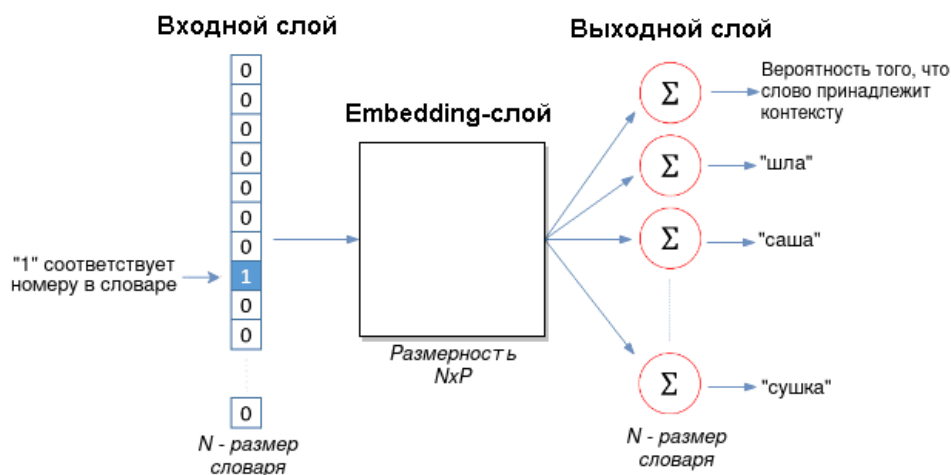


Рис. 1. Архитектура нейросети Skip-gram

Основной идеей, лежащей в основе библиотеки word2vec, является представление слов как векторов. Векторы строятся таким образом, что семантически близкие слова имеют похожие вектора. Это позволяет создавать графы слов, в которых связи отражают смысловую близость (рис. 2).

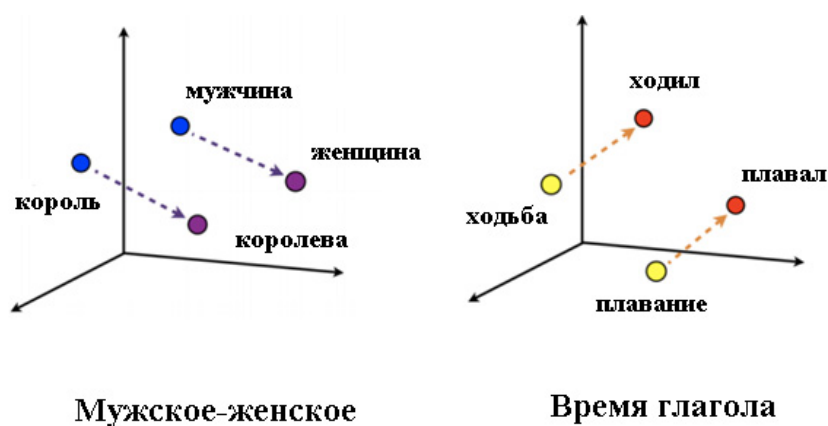


Рис. 2. Векторное представления слов

С помощью библиотеки word2vec можно проводить поиск гипер-гипонимов для новых слов, используя методы машинного обучения и анализа семантики текстовых данных. Гипер-гипонимы представляют собой отношения «родитель-ребенок» между словами, где гипоним является более конкретным и узким понятием, чем гипероним.

FastText – это библиотека, разработанная Facebook, которая расширяет идеи word2vec для работы с подслово-моделью. Она используется для работы с корпусами текста, которые содержат неизвестные слова. Преимущества fastText в том, что она может обрабатывать неизвестные слова, а также делать предсказания на основе подстрок. Недостатки заключаются в том, что она может обрабатывать *только английский язык* [3].

Основным преимуществом FastText является быстрота работы и высокая точность классификации. В библиотеке реализованы алгоритмы, позволяющие обрабатывать огромные объемы данных за счет использования многопоточности.

FastText широко используется для анализа текста, включая задачи классификации, кластеризации, предсказания тегов и многие другие. Он также может быть использован для создания векторных представлений текстовых данных, которые могут быть использованы в других моделях машинного обучения (рис. 3).

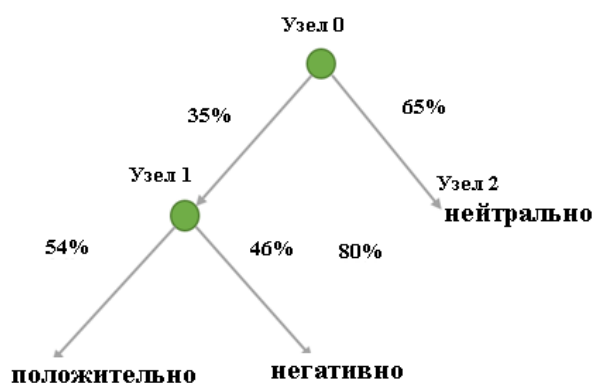


Рис. 3. FastText иерархическая структура для анализа настроений в текстах

Словарь RuWordNet

RuWordNet – это электронный лексический ресурс, созданный на основе синтаксически сетевой теории WordNet. RuWordNet разработан на основе анализа научной литературы, переведенной на русский язык, и объединяет более 300 тысяч синтаксических связей между словами русского языка. Этот лексический ресурс собирает и структурирует лексические единицы, связанные между собой по семантической близости, фиксируя особенности слов и их значения [4].

Кроме того, RuWordNet дает пользователю возможность искать синонимы, антонимы, гипонимы и гиперонимы в русском языке, что позволяет эффективнее описать концепцию и придать тексту точности и ясности в научной области [5].

Одним из преимуществ RuWordNet является то, что он покрывает широкий спектр лексических единиц, включая названия научных теорий, технологий, процессов, материалов и прочих терминологических единиц.

Однако RuWordNet как и все лексические базы имеет свои ограничения и недостатки, такие как сложность его использования, не все лексические единицы, особенно новые термины, могут быть найдены и описаны в словаре. Также возможны неточности в фиксации связей между словами, оперение, обрезание и присваивание некорректного значения для ряда лексических единиц, что усложняет процесс поиска и выбора необходимых синонимов и антонимов.

Словарь RuWordNet довольно качественный, потому что собран лингвистами вручную. Но поэтому же наполнение этого словаря не очень высокое. Хотелось бы научиться добавлять новые понятия в таксономии автоматически, или хотя бы полуавтоматически (машина предлагает варианты, лингвист их утверждает).

Поиск гипер-гипонимических отношений языка

Для решения данной задачи был выбран следующий вариант решения [6]:

1. Сформировать базу из лемматизированных слов для последующего эмбединга.

На этом этапе нами должна быть выполнена подготовка данных для получения векторных представлений слов записанных на естественном языке. Поэтому сначала потребуется предобработка когда будут удалены все числовые данные, тэги, знаки пунктуации и ненужные символы (-, +, %, &, ?, знаки абзаца и прочие). Здесь удобнее использовать библиотеку `re` языка Python, определяющей работу с регулярными выражениям. Затем производится лемматизация исходного набора слов с целью приведения слов начальной, или словарной, форме. Тем самым мы уберем появление слов с разными падежами или склонениями. Лемматизация осуществляется с помощью набора команд библиотеки `rumorphy2`.

2. С помощью модели word2vec получить числовые представления (эмбединги) для всех терминов в таксономии.

Заметим, что для достижения высокой точности векторных представлений требуется большой объем данных для обучения. Поэтому можно например использовать возможности готовой статической модели национального корпуса русского языка (НКРЯ) на 270 миллионов слов (462 Мб) – `ruscorpora_upros_cbow_300_20_2019` [7].

3. Найти 50 наиболее близких терминов к запросу по сходству их эмбедингов. При использовании НКРЯ можно выбирать слова той же части речи, что и исходное.

4. Далее, используя возможности библиотеки RuWordNet, необходимо запросить каждый из этих терминов дать свои рекомендации по различным категориям за один-два иерархически более высоких уровня.

5. Объединить и обработать голоса, данные гиперонимами, посчитав общий вес каждой категории.

6. Составить список топ-5 гиперонимов с наибольшим весом.

Заключение

Библиотеки машинного обучения обладают широкими возможностями и их комплексное использование позволяет решать достаточно широкий класс задач. В нашем случае совместное использование word2vec и RuWordNet позволяет построить решение задачи поиска гипер-гипонимических отношений языка для слов даже не входящих в исходный тезаурус.

Список литературы

1. Словарь русского языка : в 4 т. / РАН, Ин-т лингвистич. Исследований ; под ред. А. П. Евгеньевой. 4-е изд., стер. М. : Рус. яз. : Полиграфресурсы, 1999.
2. Обучаем Word2vec: практикум по созданию векторных моделей языка. URL: <https://sysblok.ru/knowhow/obuchaem-word2vec-praktikum-po-sozdaniju-vektornyh-modelej-jazyka/> (дата обращения: 29.04.2023).
3. Обзор четырёх популярных NLP-моделей. URL: <https://proglib.io/p/obzor-chetyreh-populyarnyh-nlp-modeley-2020-04-21> (дата обращения: 12.10.2022).
4. Тезаурус русского языка RuWordNet. URL: <https://ruwordnet.ru/ru> (дата обращения: 03.05.2023).
5. Лукашевич Н. В. Тезаурусы в задачах информационного поиска. М., 2010. 396 с.
6. Хабр. Как предсказать гипероним слова (и зачем). Моё участие в соревновании по пополнению таксономии URL: <https://habr.com/ru/post/507228/> (дата обращения: 07.10.2022).
7. RusVectōrēs: модели. URL: <http://vectors.nlpl.eu/repository/20/180.zip> (дата обращения: 03.05.2023).

Применение нейронных сетей на графических процессорах общего назначения для задач распознавания изображений

Иван Сергеевич Шумкин

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
xzibit117@mail.ru

Аннотация. Приведен обзор существующих нейронных сетей для задач распознавания изображений. Даны рекомендации для реализации нейронных сетей на графических процессорах с использованием современных библиотек машинного обучения.

Ключевые слова: нейронные сети, графические процессоры, распознавание изображений

Application of neural networks on general-purpose GPUs for image recognition tasks

Ivan S. Shumkin

Penza State University, Penza, Russia
xzibit117@mail.ru

Abstract. This article will provide an overview of existing neural networks for image recognition tasks. Recommendations will also be given for the implementation of neural networks on GPUs using modern machine learning libraries.

Keywords: neural networks, graphics processors, image recognition

Введение

С первого взгляда, кажется, для разработки и обучения нейронных сетей достаточно просто хорошего ноутбука. Но при детальном рассмотрении проблемы увеличения скорости обучения, можно заметить, что нейронные сети обучаются на CPU медленнее, чем на GPU. Также далеко не все существующие на данный момент архитектуры нейронных сетей подходят для задач распознавания.

В современное время использование нейронных сетей достаточно обширно и включает в себя обработку числовых данных, которую осуществляют многослойные нейронные сети. Сбор и обработку данных, изменяющихся с течением времени – рекуррентные нейронные сети, генерацию текстов и изображений – генеративные нейронные сети, как пример – ChatGPT.

Также немаловажной областью применения нейронных сетей, в контексте машинного обучения является компьютерное зрение. Компьютерное зрение, как технология, включает в себя обработку и распознавание изображений, последнее может выполнять задачи классификации, сегментации изображений либо детектирование объектов на изображениях.

Проблема, которую предлагается решить в данной статье, состоит в том, чтобы устранить недостаточность знаний для начинающих специалистов в области применения искусственного интеллекта, в частности нейронных сетей для задач распознавания изображений. Также, при выборе определенной архитектуры нейронной сети, специалистам нередко требуется подбирать определенные фреймворки (framework) и библиотеки машинного обучения для реализации нейронной сети в программном виде.

В последующих этапах разработки может возникнуть проблема использования возможностей центрального процессора (CPU) либо графического процессора (GPU) вычислительной системы (компьютер, ноутбук) для реализации алгоритмов машинного обучения.

Цель данной статьи – попытаться дать рекомендации для нахождения оптимального решения разработчикам использования аппаратных реализаций нейронных сетей.

Виды нейронных сетей для задач распознавания изображений

Сверточная нейронная сеть (англ. CNN) – это вид специальной архитектуры нейронных сетей, предназначенной для задач распознавания изображений и входящей в состав технологий глубокого обучения (англ. deep learning). Данная архитектура впервые была предложена ученым Яном Лекуном [1].

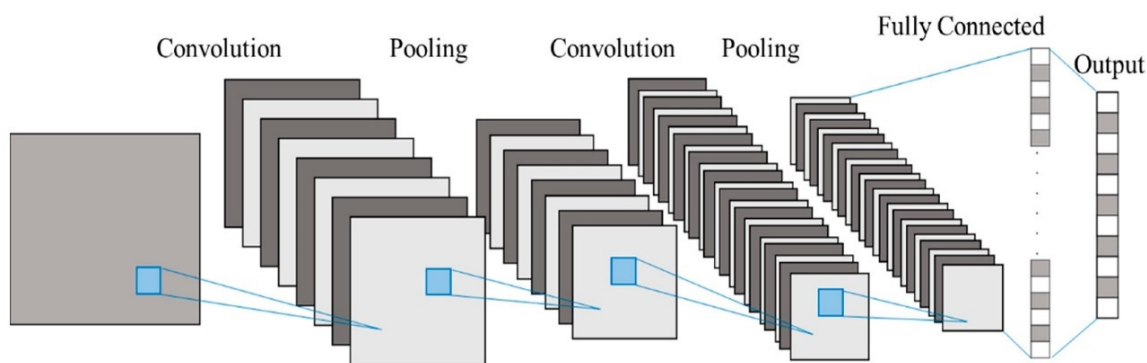


Рис. 1. Архитектура сверточной нейронной сети

Технология глубокого обучения функционирует по аналогии с принципами работы головного мозга, а именно зрительной коры, в структуре которой существуют нейроны, которые соединены с небольшими подполями зрения. Каждый из этих нейронов отвечает

за небольшой участок рецептивный поля зрения. Если рассматривать все поле зрения, то получится, что вместе нейроны покрывают все зрительное пространство. Сверточная нейронная сеть как архитектура, состоит из сверточных и подвыборочных слоев, которые взаимно чередуются.

Деволюционные нейронные сети (англ. DNN), или развертывающие нейронные сети, также называемые обратными графическими сетями, реализуют процесс, обратный сверточным CNN. Впервые данный вид нейросетей был предложен Меттью Зейлером [2]. Получается, сети подается на вход слово, например «самолет», а далее необходимо обучить нейросеть генерировать изображения самолетов путем сравнения получаемых изображений с реальными изображениями самолетов. Но в реальных случаях, при работе данной нейросети, на вход подается не слово в виде строки, а бинарный классификатор в виде вектора, к примеру $\langle 0, 1 \rangle$ – это самолет, $\langle 1, 0 \rangle$ – птица, а $\langle 1, 1 \rangle$ – не самолет, и не птица. Вместо подвыборочных слоев и слоев свертки, присутствующих в CNN, в развертывающих нейронных сетях присутствуют аналогичные обратные операции, обычно интерполяция или экстраполяция.

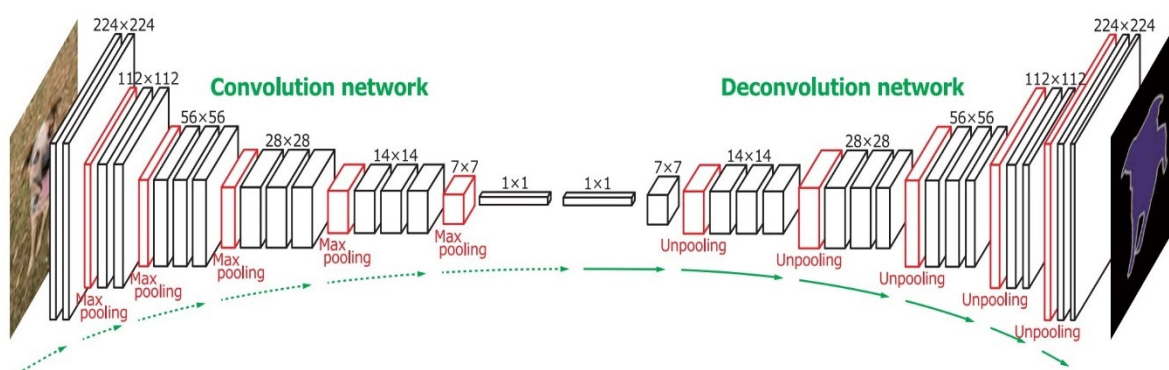


Рис 2. Архитектура деконволюционной нейронной сети

Рекуррентные нейронные сети (англ. Recurrent Neural Network - RNN) – вид специальной архитектуры нейронных сетей, в которых связи между нейронами образуют последовательность определенного, во многих случаях направленного вида, что позволяет строить последовательные пространственные цепочки и производить обработку серии событий по времени. Вероятно, первой рекуррентной нейронной сетью была сеть Хопфилда [3], которая реализовывала в своей архитектуре ячейку ассоциативной памяти. Также рекуррентные нейронные сети предложил Джефф Элман в 1990 году [4]. В рекуррентных нейронных сетях нейрон как элемент может взаимодействовать сам с собой. В этом и есть отличие данной архитектуры от остальных архитектур нейронных сетей. Рассмотрим принцип работы таких нейронных сетей. Допустим, на вход подается некая последовательность, которая поэлементно передается

нейронам в сети, которые свой сигнал вновь передают себе с следующим элементом последовательности, пока данная последовательность не будет обработана полностью. Пусть сеть обрабатывает текст, как некоторую последовательность. Каждый элемент последовательности поступает на нейрон в новый момент времени, причем в нейроне накапливается с начала времени действия нейронной сети опыт.

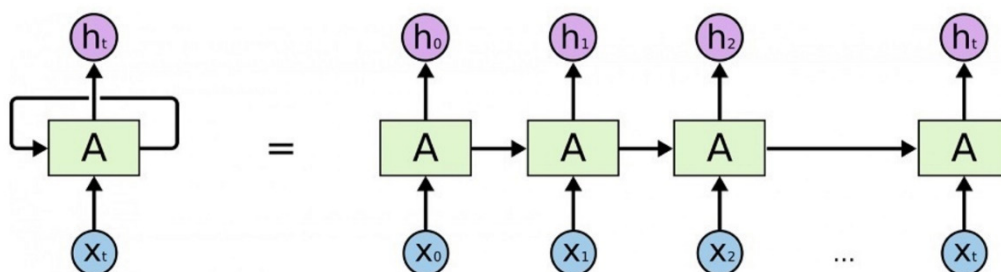


Рис. 3. Архитектура рекуррентной нейронной сети

В классическом понимании, это происходит путем сложения векторов сигнала и памяти и применение функции активации, например ReLU или гиперболического тангенса. Но в данном случае, память получается недолговременной, при реализации данным способом. Это происходит потому, что информация в новом сигнале соединяется с прошлой памятью, и, через небольшое количество итераций первоначальная информация теряется в ходе перезаписи. При работе с большими объемами данных это критично, так как сохраненные в памяти закономерности не будут применяться для масштабных паттернов. Это проблема является фундаментальной для многих нейронных сетей и называется проблемой исчезающего градиента.

Чтобы исправить проблему кратковременной памяти, была предложена версия LSTM-RNN (Long Short-Term Memory Recurrent Neural Network) в 1997 году Зеппом Хохрайтером и Юргеном Шмидхубером [5]. Такая нейронная сеть находится под управлением рекуррентных вентилей «забывания». Во время обучения таких нейронных сетей по алгоритму распространения ошибки назад по времени проходит через множество искусственных слоев, что позволяет сохранить память о большем количестве временных интервалов.

Топологии LSTM могут подвергаться изменениям в соответствии с конкретными задачами разработчика.

Использование рекуррентных нейронных сетей для распознавания изображений до некоторого времени применялось нечасто, но в 2015 году команда исследователей из компании Microsoft, при участии в соревнованиях ImageNet применяли нейросеть, которую они называли остаточной (Residual Neural Network). Но выяснилось, что она является почти полным эквивалентом архитектуры LSTM-RNN.

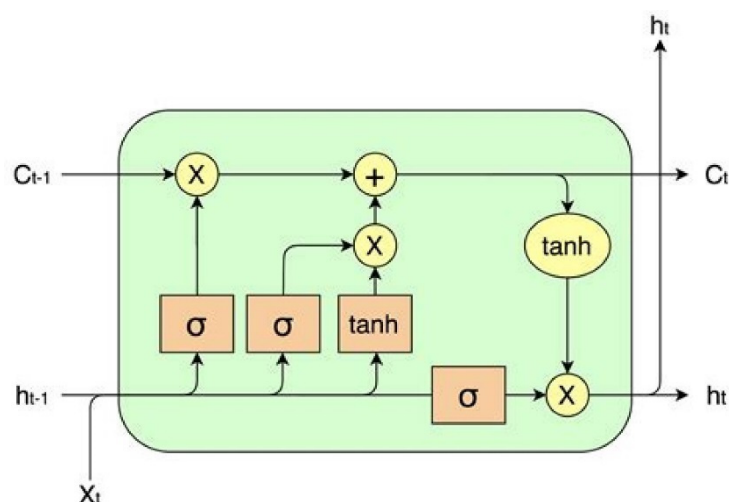


Рис. 4. Архитектура LSTM-рекуррентной нейронной сети

R-CNN сети

Сверточные нейронные сети на основе регионов (Region-based Convolutional Neural Networks)

В 2014 году в университете Беркли в штате Калифорния вышла статья Росса Гиршика и других авторов “Расширенные иерархии объектов для точного обнаружения объектов и семантической сегментации” [6]. В этой статье авторы предложили концепцию для нейронных сетей детекции объектов на изображениях: применение сверточных нейронных сетей в совокупности с рекомендациями по «регионам» – меньшим частям исходного изображения, в которых могут содержаться детектируемые объекты. Они назвали этот метод R-CNN.

R-CNN сети являются более продвинутыми нейронными сетями, чем сверточные, так как применяются в совокупности для детекции, сегментации объектов на изображении и видеоданных.

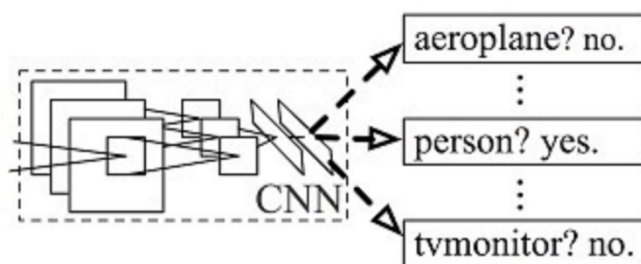


Рис 5. Принцип действия R-CNN сети

Аппаратная реализация нейронных сетей

Тренировку и обучение нейронных сетей можно проводить на хорошем ноутбуке средней стоимости. Модели этих нейронных сетей

могут успешно обучаться на оборудовании, оснащённом графическими процессорами (GPU) с заметным повышением скорости обучения, по сравнению с обучением на центральном процессоре (CPU). Исключение составляют модели на основе обучения с подкреплением [7]. Но если мы хотим обучать более крупные модели, этот процесс требует некоторой доработки. Для этой цели используются графические процессоры, тензорные процессоры (TPU), программируемые пользователем вентильные матрицы (FPGA) и нейроморфные чипы. Одним из решений для обучения крупных нейронных сетей является обучение на многопроцессорных серверах в GoogleColab.

Специальное аппаратное обеспечение для глубоких сетей

Тренировка нейронной сети подразумевает собой последовательность тензорных операций, выполняемых на мини-пакетах данных. Способность аппаратного обеспечения быстро выполнять операции матричного умножения всегда критична при обучении нейронных сетей, потому что тензорные операции обычно преобразуются в операции матричного умножения при обучении. Центральные процессоры универсальны, и предназначены для решения множества задач на компьютере, поэтому именно универсальность означает появление дополнительных расходов времени при обучении.

Существует ряд альтернативного аппаратного обеспечения для обучения нейронных сетей. Такое оборудование разделяется на две категории: только вывод, тренировка и вывод.

Аппаратное обеспечение только для вывода может применяться для внедрения уже обученных моделей в производственную среду, в то время как аппаратное обеспечение для тренировки и вывода может обучать модели и соответственно далее внедрять обученные модели. В современное время лидирующие позиции в производстве аппаратного обеспечения для тренировки нейронных сетей занимает компания NVIDIA. Она славится выпуском графических процессоров. Также существует компании AMD и Intel, выпускающие GPU.

Обучение нейронных сетей на CPU является не самым худшим вариантом. К примеру, CPU отлично подходит для обучения небольших моделей нейронных сетей, а также для задач самообучения с максимизацией подкрепления. В данной статье будет рассмотрено применение для обучения нейронных сетей графических процессоров.

GPU (graphics processing unit – графический процессор) в первое время были разработаны для реализации вычислений, необходимых для графики. Но в процессе использования данных процессоров стало ясно, что примитивы, которые используются для определения графических шейдеров, могут быть также использоваться для задач глубокого обучения. Графика и машинное обучение в своей математической основе опираются на матричные умножения. В эмпирическом плане матричные

умножения на графических процессорах имеют скорость реализации, на порядок или два превышающую скорость на центральных процессорах. Почему GPU оказались в этом плане быстрее? Суть в том, что GPU используют тысячи однотипных потоков. Разработчики преуспели в разложении матричного умножения на параллельные операции, поэтому происходит резкое увеличение скорости, по сравнению с операциями на CPU.



Рис. 6. Сравнение архитектур CPU и GPU

В архитектуре GPU реализуется намного большее количество ядер, чем в CPU, поэтому GPU отлично подходят для реализации численных линейно-алгебраических методов, которые применяются в графических вычислениях, связанных с машинным обучением.

Технологии вычислений общего назначения на графических процессорах

Вычисления общего назначения на графических процессорах (GPGPU) – это применение графического процессора, обычно реализующий вычисления для задач компьютерной графики, для реализации вычислений в приложениях, обычно обрабатываемых центральным процессором.

На данный момент времени двумя лидирующими технологиями в области GPGPU являются CUDA и OpenCL.

Сегодня существует ряд компаний-производителей GPU, причем лидирующие позиции занимает компания NVIDIA. Большая часть мощности GPU этой компании связана с собственной библиотекой CUDA (compute unified device architecture, программно-аппаратной архитектурой параллельных вычислений), которая предлагает примитивы, облегчающие написание программ на GPU. Компания NVIDIA предлагает библиотеку для CUDA, под названием CUDNN, предназначенную для ускорения глубоких сетей. Tensorflow имеет встроенную поддержку для библиотеки CUDNN, поэтому для ускорения нейронных сетей, можно использовать CUDNN посредством Tensorflow.

CUDA и OpenCL реализуют два различных интерфейса для программирования графических процессоров. OpenCL является открытым стандартом, определенным Khronos Group, который используется для программирования CPU, GPU и вычислительных устройств других типов от различных компаний, в то время как CUDA проприетарна и используется для вычислений на GPU NVIDIA. Хотя разработчики OpenCL планируют создать портативный язык для программирования на GPU, его общность может снизить производительность вычислений. С помощью технологии OpenCL можно писать программы, которые будут выполняться параллельно на разных вычислительных устройствах (таких как процессоры и графические процессоры).

В то время как CUDA реализуется как программно-аппаратная архитектура, OpenCL является доминирующим открытым языком вычислений (API) на GPU общего назначения. OpenCL активно поддерживается на платформах Intel, AMD, Nvidia и ARM.

Также существуют и другие технологии в области GPGPU:

DirectCompute – вычислительный шейдер.

AMD FireStream — технология для реализации алгоритмов, выполняемых на GPU ускорителей ATI.

OpenACC.

C++ AMP (Microsoft).

Обучение нейронных сетей с помощью технологии GPGPU

Рассмотрим применение технологий GPGPU для различных графических процессоров. Если графический процессор Nvidia, то логично и необходимо использовать технологию CUDA.

Если графический процессор AMD, то целесообразно использовать технологию OpenCL, PlaidML/DirectML либо Rocm [8], который работает только на UNIX-системах. Если обучение нейронной сети осуществляется на системе Windows, и применяется библиотека Tensorflow, то необходимо использовать DirectML. Технология PlaidML работает с библиотекой Keras, но заменяет Tensorflow.

Если Intel – используйте oneAPI, который позволяет обучать высокопроизводительные нейронные сети на CPU, GPU, FPGA и других устройствах.

Заключение

В заключение, можно сказать, что собираясь разрабатывать и обучать нейронные сети для задач распознавания, целесообразно использовать архитектуру сверточной нейронной сети, а также аппаратно ее реализовывать на графических процессорах NVIDIA с применением технологии CUDA. Если же нейросеть реализуется на GPU фирмы AMD, то лучше использовать плагины PlaidML/DirectML – они запускаются под популярные библиотеки машинного обучения соответственно Keras/Tensorflow.

Список литературы

1. LeCun Y., Bengio Y. Convolutional Networks for Images, Speech, and Time-Series, in Arbib, M. A. (eds) // The Handbook of Brain Theory and Neural Networks, MIT Press, 1995.
2. Zeiler M. D., Krishnan D., Taylor G. W., Fergus R. Deconvolutional Networks // Proc. of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'2010. 2010. P. 2528–2535.
3. Hopfield J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1982. Vol. 79 (8). P. 2554–2558.
4. Elman J. L. Finding structure in time // Cognitive science. 1990. Vol. 14 (2). P. 179–211.
5. Sepp Hochreiter, Jürgen Schmidhuber. Long short-term memory // Neural Computation. 1997. Vol. 9, № 8. P. 1735–1780.
6. Girshick, Ross [et al.]. Rich Feature Hierarchies for Accurate Object Detection and Semantic Segmentation // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2014.
7. Ahmet Inci, Evgeny Bolotin, Yaosheng Fu, Gal Dahal, Shie Mannor, David Nellans, Diana Marculescu. The Architectural Implications of Distributed Reinforcement Learning on CPU-GPU Systems. URL: <https://arxiv.org/abs/2012.04210> (дата обращения: 08.04.2023).
8. Есть ли жизнь без Nvidia? Запускаем TensorFlow на Radeon RX 580. URL: <https://habr.com/ru/articles/538138/> (дата обращения: 15.04.2023).

7. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

УДК 51-7

Особенности организации спецкурса «Методика преподавания специальных разделов математики и информатики в учебных заведениях СПО и ДПП»

**Лилия Александровна Купряшина¹,
Наталья Васильевна Зверовщикова²**

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹liliya_sl@mail.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы организации спецкурса по методике преподавания специальных разделов математики и информатики в учебных заведениях Среднего специального образования и дополнительного профессионального образования в техническом вузе.

Ключевые слова: методика преподавания, специальные разделы математики и информатики, обучение студентов технических специальностей

Features of the organization of the special course «Methods of teaching special sections of mathematics and computer science in educational institutions of secondary vocational education and additional professional programs in a technical university»

Lilia A. Kupryashina¹, Natalya V. Zverovshchikova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia
¹liliya_sl@mail.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru

Abstract. The article deals with the organization of a special course on the methodology of teaching special sections of mathematics and computer science in educational institutions of secondary vocational education and additional professional programs in a technical university.

Keywords: teaching methods, special sections of mathematics and computer science, training of students of technical specialties

Спецкурс «Методика преподавания специальных разделов математики и информатики в учебных заведениях СПО и ДПП» изучается

на четвертом курсе студентами специальности «Прикладная математика». Общая трудоемкость дисциплины составляет 72 часа, из которых 50,25 часов отводится на самостоятельную работу. Целями освоения рассматриваемой дисциплины являются приобретение обучающимися знаний, умений и навыков в области теории и методики обучения математике и информатике, позволяющих подготовить конкурентоспособного выпускника для сферы образования, готового к инновационной творческой реализации учебно-воспитательного процесса в образовательных учреждениях различного уровня и профиля. Формируемые дисциплиной знания и умения готовят выпускника данной образовательной программы к выполнению следующих трудовых функций:

- А/01.6 Организация учебной деятельности обучающихся по освоению учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей) программ профессионального обучения, СПО и (или) ДПП (ПС 01.004 «Педагог профессионального обучения, профессионального образования и дополнительного профессионального образования»).

- А/02.6 Педагогический контроль и оценка освоения образовательной программы профессионального обучения, СПО и (или) ДПП в процессе промежуточной и итоговой аттестации (ПС 01.004 «Педагог профессионального обучения, профессионального образования и дополнительного профессионального образования»).

- А/03.6 Разработка программно-методического обеспечения учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей) программ профессионального обучения, СПО и (или) ДПП (ПС 01.004 «Педагог профессионального обучения, профессионального образования и дополнительного профессионального образования»).

Учебная дисциплина «Методика преподавания специальных разделов математики и информатики в учебных заведениях СПО и ДПП» относится к блоку дисциплин по выбору. Данная дисциплина имеет логическую и содержательно-методологическую взаимосвязь с другими дисциплинами, так как углубляет и закрепляет математические и естественнонаучные знания и навыки, сформированные в результате изучения дисциплин обязательной части, освоение данной дисциплины является теоретической и практической основой для прохождения производственной (педагогической практики).

Содержание рассматриваемой дисциплины включает следующие разделы.

Особенностями обучения методике преподавания специальных разделов математики и информатики в учебных заведениях СПО и ДПП студентов технических специальностей, в частности «Прикладная математика», являются высокий уровень математической подготовки студентов, специфика математического образования студентов рассматриваемого направления, отсутствие педагогических и методических дисциплин, незавершенность методической системы преподавания

специальных разделов математики и информатики в учебных заведениях СПО и ДПП. Поэтому преподавателю необходимо учитывать специфику специальности «Прикладная математика», тщательно отбирать учебный материал, формировать мотивационную составляющую образовательного процесса.

Таблица 1

Содержание дисциплины «Методика преподавания специальных разделов математики и информатики в учебных заведениях СПО и ДПП»

Номер раздела	Название учебного раздела	Изучаемые темы
Раздел 1	Методическая система обучения математике и информатике в учебных заведениях СПО и ДПП	Математика как наука и учебный предмет в школе. Методическая система обучения математике в СПО. Общая характеристика ее основных компонентов: цели и задачи обучения математике, содержание, методы, формы, средства обучения. Информатика как наука: предмет и понятие; изучение истории развития информатики как науки. Информатика как учебный предмет в СПО, изучение структуры, целей и задач курса информатики и ИКТ. Дидактические принципы и особенности их реализации в обучении математике в современных условиях. Дифференцированное изучение курса математики. Уровневая и профильная дифференциация. Научные методы в обучении математике: наблюдение, опыт, сравнение, конкретизация, обобщение, абстрагирование. Анализ и синтез в обучении математике. Виды умозаключений. Индукция, дедукция и аналогия в обучении математике. Математические понятия и методика их формирования. Методика изучения аксиом и теорем. Задачи в обучении математике. Роль и функции задач. Методика обучения решению математических задач. Методика работы с алгоритмами и правилами. Специфика урока информатики и математики; его структура; основные требования к уроку. Особенности различных типов уроков информатики и математики и их структурных компонентов
Раздел 2	Алгебра и начала математического анализа	Цели и задачи изучения вопросов, связанных с производной и ее применением. Методические особенности раскрытия содержания понятий: «предел функции в точке», «непрерывность функции в точке (на интервале)». Различные определения понятия предела функции: на языке δ - ε (по Коши), на языке последовательностей (по Гейне). Методика введения и изучения

Номер раздела	Название учебного раздела	Изучаемые темы
		понятия предела функции в точке. Методика изучения непрерывности функции в точке и применения непрерывности. Различные пути изучения этих понятий: формально-содержательный и наглядно-интуитивный. Пропедевтика понятия производной (приращение функции, приращение аргумента, геометрический смысл отношения приращения функции к приращению аргумента, понятие касательной к кривой как предельного положения секущей). Методика введения производной в курсе математики. Цели изучения первообразной и интеграла в учебных заведениях СПО и ДПП. Два основных подхода к изложению теории интегралов, их достоинства и недостатки. Последовательность изучения вопросов: первообразная и интеграл. Методика введения понятия «первообразная». Методика изучения основных теорем раздела: основное свойство первообразной, три правила нахождения первообразной. Методика изучения интеграла. Особенности введения понятия «криволинейная трапеция». Нахождение площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница и ее место в разделе. Методика изучения тригонометрической, показательной и логарифмической функций. Методика изучения тригонометрических, показательных, логарифмических уравнений, неравенств и их систем
Раздел 3	Элементы теории вероятностей и математической статистики	Цели и задачи изучения теории вероятностей и математической статистики в учебных заведениях СПО и ДПП. Методические особенности формирования понятий «Случайное событие», «Вероятность события». Методика обучения решению вероятностных задач. Методика изучения основных статистических характеристик «Модуль», «Медиана», «Размах». Методика изучения элементов комбинаторики. Необходимый уровень строгости изложения. Особенности «встраивания» новых тем в школьный курс математики
Раздел 4	Стереометрия	Логическое строение курса стереометрии. Различные возможные подходы к построению курса, их сравнительный логико-методический анализ. Сущность аксиоматического построения курса стереометрии. Основные понятия, аксиомы и методика введения первых аксиом и изучение следствий из них. Характеристика

Номер раздела	Название учебного раздела	Изучаемые темы
		систем аксиом в действующих школьных учебниках. Трудности изучения первых разделов. Развитие пространственных представлений при изучении стереометрии. Роль наглядности и ТСО при изучении первых разделов стереометрии. Различные случаи расположения прямых и плоскостей в пространстве. Методика изучения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. Определения параллельных прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей, признаки параллельности, свойства, определение угла между прямыми, перпендикулярные прямые, определения перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности плоскостей, признаки перпендикулярности. Роль чертежей и моделирования при изучении основных теорем раздела. Методика изучения параллельного проектирования и его свойств. Требования к чертежам в курсе стереометрии. Различные содержательные трактовки понятия многогранника. Основной понятийный аппарат. Частные виды выпуклых многогранников, изучаемые в школьном курсе. Определения и свойства различных видов многогранников (призм параллелепипедов, пирамид, усеченных пирамид, правильных многогранников). Реализация основных требований к изображению многогранников. Методика изучения призм и пирамид. Учебное моделирование. Методика использования компьютера и традиционных средств наглядности на различных этапах изучения темы. Возможности использования технологии УДЕ при изучении темы. Анализ содержания школьной программы и учебников геометрии. Основной понятийный аппарат. Определения и свойства тел вращения (цилиндра, конуса, шара). Методика обучения изображению тел вращения. Правильные и неправильные изображения тел вращения. Методика использования компьютера на различных этапах изучения темы. Возможности использования аналогии в процессе изучения данной темы (Изучение окружности и круга, сферы и шара). Методика обучения решению задач на комбинации многогранников и тел вращения
Раздел 5	Алгоритмизация и программирование	Методические особенности изучения основных понятий: алгоритм; свойства алгоритма (понятность, точность, конечность, дискретность,

Номер раздела	Название учебного раздела	Изучаемые темы
		массовость); исполнитель, среда исполнителя; величина – имя, тип, значение; алгоритмические конструкции: следование, ветвление, цикл; блок-схема; формальное исполнение алгоритмов; вспомогательный алгоритм. Методические особенности изучения основных понятий: языки программирования, основные операторы ввода, вывода, присваивания, цикла, ветвления; правила записи программы; что такое трансляция; назначение систем программирования; содержание этапов разработки программы: алгоритмизация – кодирование – отладка – тестирование. Методические особенности изучения основных понятий. Знакомство с конкретным языком программирования (Паскаль, Delphi, Visual Basic, C++Builder).

В качестве примера организации учебной деятельности в рамках спецкурса «Методика преподавания специальных разделов математики и информатики в учебных заведениях СПО и ДПП» рассмотрим фрагмент практического занятия «Методика изучения алгебры и начал математического анализа».

Цели практического занятия:

- раскрыть методику изучения двух содержательных линий курса математики старших классов (производная, интеграл) и характер системы упражнений по этим содержательным линиям;
- познакомиться с особенностями работы при изучении начал анализа в системе СПО и ДПП, перевод наглядно-интуитивных представлений на формально-логический язык и обратно, осуществление взаимосвязей с курсами физики и геометрии, учет мировоззренческого характера материала;
- освоить методику работы с некоторыми видами математических заданий: «Найти значение производной в некоторой точке», «Исследовать функцию с помощью производной и построить ее график», «Решить текстовую задачу на наибольшее и наименьшее значение», «Вычислить площадь криволинейной фигуры», «Найти объем тела с помощью интеграла»;
- познакомиться с модульной технологией обучения.

Задание I. Методика введения понятия производной и методика изучения правил вычисления производных

1. Разработайте конспект урока по теме: «Определение производной» (с презентацией).
2. Разработайте учебные материалы для учащихся СПО по модульной технологии по теме: «Правила вычисления производных».

Задание II. Методика исследования функции с помощью производной.

1. Сравните определения понятия «критическая точка» и формулировку достаточного условия возрастания (убывания) функции в действующих школьных учебниках, справочниках и вузовских учебниках.

2. Разработайте лекцию по теме «Исследование функции на монотонность и экстремумы с помощью производной» для учащихся СПО.

3. Выделите типовые задания на исследование функции с помощью производной и на применение производной (для приближенных вычислений, для составления уравнения касательной, для решения физических задач).

Задание III. Методика изучения первообразной.

1. Составьте математическую карту по теме «Первообразная».

2. Раскройте методику изучения первообразной:

- разработайте опорный конспект по введению понятия первообразной и покажите фрагмент урока с его использованием;

- определите виды задач для усвоения понятия первообразной;

- подготовьте фронтальный опрос по таблице первообразных;

- выделите виды задач, связанных с первообразной, и составьте алгоритмы их решения.

Задание IV. Методика изучения криволинейной трапеции и интеграл.

1. Разработайте фрагмент урока по теме: «Площадь криволинейной трапеции» (введение и усвоение определения криволинейной трапеции).

Таким образом, подобные задания позволяют сформировать у студентов готовность к разработке и реализации методических моделей, методик, технологий и приемов обучения; к систематизации, обобщению и распространению методического опыта в профессиональной области; к применению современных методик и технологий организации и реализации образовательного процесса на различных образовательных ступенях в различных образовательных учреждениях.

Несмотря на то, что, небольшой объем курса не позволяет подробно рассмотреть многие общие и частные вопросы теории и методики обучения математике, однако, он позволяет сориентировать будущего специалиста на активную работу в его педагогической деятельности.

Возможности применения нейронных сетей в образовательном процессе

Татьяна Юрьевна Леонова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
Tank_81@bk.ru

Аннотация. В первой части исследования определяется понятие нейронных сетей и их целесообразность применения в процессе обучения. Во второй части описаны некоторые трудности, которые испытывает преподаватель в традиционной системе обучения, и пути их устранения при внедрении нейронных сетей в образовательный процесс. В третьей части выделяются основные направления применения нейронных сетей в процессе обучения математике в техническом вузе.

Ключевые слова: образовательный процесс, нейронные сети, индивидуализация обучения

The possibilities of using neural networks in the educational process

Tatyana Yu. Leonova

Penza State University, Penza, Russia
Tank_81@bk.ru

Abstract. The article consists of three parts. The first part defines the concept of neural networks and their applicability in the learning process. The second part is devoted to some of the difficulties experienced by the teacher in the traditional learning system and how they can be eliminated when introducing neural networks into the educational process. The third part highlights the main areas of application of neural networks in the process of teaching mathematics at a technical university.

Keywords: educational process, neural networks, individualization of learning

Современное образование, в том числе и обучение математике в вузе, на протяжении длительного времени остается неизменным на фоне стремительных изменений в различных сферах деятельности общества, живущего в настоящее время. В качестве важнейшего фактора модернизации высшего образования обычно рассматривается использование компьютерных технологий в преподавании различных дисциплин.

Использование традиционных методов и средств обучения явно недостаточно студентам в процессе получения высшего образования. Одним из способов решения данной проблемы, является внедрение

в образовательный процесс всевозможных технических средств, среди которых лидирующие места занимают искусственные нейронные сети.

Под нейронными сетями подразумеваются вычислительные структуры, которые моделируют простые биологические процессы, обычно ассоциируемые с процессами человеческого мозга. Адаптируемые и обучаемые, они представляют собой распараллеленные системы, способные к обучению путем анализа положительных и отрицательных воздействий. Элементарным преобразователем в данных сетях является искусственный нейрон, формальный нейрон или простой нейрон, названный так по аналогии с биологическим прототипом.

Термин «нейронные сети» сформировался в 40-х годах XX века в среде исследователей, изучавших принципы организации и функционирования биологических нейронных сетей. Основные результаты, полученные в этой области, связаны с именами американских исследователей У. Маккалоха, Д. Хебба, Ф Розенблатта, М. Минского, Дж. Хопфилда и др. [3].

Нейронные сети – класс аналитических методов, построенных на (гипотетических) принципах обучения мыслящим существ и функционированию мозга, которые позволяют прогнозировать значения некоторых сменных в новых наблюдениях на основе результатов других наблюдений (для этих же или других сменных) после прохождения этапа так называемого обучения на имеющихся данных.

Основной целью внедрения нейронных сетей в образовательный процесс должно явиться повышение уровня качества подготовки специалистов.

Перечислим некоторые трудности, которые испытывает преподаватель в традиционной системе обучения:

1. Недостаток времени на занятиях для доведения до автоматизма базовых практических навыков каждым студентом, учитывая его индивидуальные способности и особенности.

Использование нейронных сетей позволяет создавать эффективные программы обучения, которые могут сократить время, необходимое на обучение. Это повышает эффективность обучения и сохранность материала. Применение нейросетей в образовании можно использовать для создания индивидуальных программ обучения, с учетом индивидуальных потребностей и уровня знаний студентов. Такая программа может индивидуально оптимизировать время обучения для каждого студента, а также предложить наиболее простой или сложный материал, исходя из уровня знаний студента.

2. Низкий уровень познавательной активности обучающихся при групповых занятиях.

Нейросетевые технологии позволяют решить проблему персонализации обучения, которая является актуальной для современного образования. Это означает, что каждый студент может получать

индивидуальную программу обучения, учитывающую его уровень знаний, скорость обучения, профессиональные интересы и прочее.

3. Отсутствие возможности у преподавателя обеспечить непрерывную адаптацию к индивидуальным особенностям каждого студента.

Применение нейронных сетей в обучении позволяет применять инновационные методы обработки информации. При этом в качестве обучающихся объектов могут выступать не только текстовые, но и звуковые, графические и видеоинформация. Это позволяет создавать индивидуальные программы обучения, анализировать индивидуальные проблемы каждого студента и создавать специальные задачи для решения индивидуальных задач.

4. Невозможность проведения регулярного и объективного контроля за процессом обучения каждого студента.

В процессе обучения нейросеть собирает информацию об успеваемости и шаге обучения конкретного студента. На основе этой информации нейронная сеть может предлагать определенные материалы и задания, чтобы помочь студенту лучше справиться с его текущими учебными проблемами. Нейросети собирают информацию о результате работы студента и могут определять, какой материал нужно дополнительно изучить или повторить, чтобы студент лучше понимал материал [2].

Все эти проблемы возможно решить при использовании искусственных нейронных сетей. Одной из основных возможностей применения искусственных нейронных сетей является повышения интеллектуального и профессионального уровня специалистов, за счет сочетания в себе способности компьютера к обработке чисел и способности человека к обобщению и распознаванию, за счет способности самообучаться, анализируя информацию, а затем самостоятельно или при помощи преподавателя принимать решения в определенной ситуации.

Исходя из вышесказанного, выделим следующие основные направления применения нейронных сетей в процессе обучения математике в техническом вузе:

- ✓ при проведении практических занятий по математике и, в частности, для самостоятельного эвристического поиска доказательств студентами;
- ✓ при осуществлении контроля знаний;
- ✓ при индивидуальной работе и самоподготовке;
- ✓ использование нейронных сетей для помощи преподавателя в подготовке к занятиям [1].

Следует отметить, что применение компьютерных технологий, таких как искусственные нейронные сети, в учебном процессе, в частности при обучении математике, повышает мотивацию к изучению предмета у студентов за счет усиления как внешних, так и внутренних стимулов. Применение компьютера приводит к повышению познавательных интересов, входящих в мотивационный комплекс и активности «слабых» студентов, их стремления к принятию оптимальных решений,

выдвижению гипотез и т.п. В первую очередь это связано со снижением «страха ошибки».

По мнению ряда психологов, положительные результаты, достигнутые при работе с компьютером, повышают самооценку студента и уверенность в себе, способность решать более сложные творческие задачи. Из позитивного отношения к работе складывается удовлетворенность студента, как на когнитивном, так и на эмоциональном уровне. Это приводит к формированию таких позитивных черт, как точность и аккуратность [4].

Задачи, связанные с распознаванием образов, могут быть применены при построении эталонной модели обучаемого, удовлетворяющей квалификационным требованиям, оценке текущего состояния (портрета) обучаемого в пространстве признаков, максимально отражающих все аспекты его деятельности, оперативном мониторинге динамики и портрета студента, принятии необходимых управленческих решений с целью оптимизации учебно-образовательного процесса. Задачу классификации с управляемым обучением сети можно интерпретировать как проблему распознавания текущего состояния обучаемого, основанного на сопоставлении предъявляемого сети образа обучаемого с контрольным целевым образцом и отображения входного образа в целевой выходной образец, что дает информацию сети о том, к какому классу следует научиться относить входной образец. Кластеризация образов с обучением сети без управления (самообучение), основанная на группировании данных с использованием конкуренции, позволяет выделять группы (кластеры) обучаемых и анализировать качество образовательного процесса на различных уровнях.

Список литературы

1. Горюнова Т. Ю. Использование компьютерных технологий на уроках математики в условиях уровневой дифференциации / Концепции математического образования : сб. тр. по материалам II Междунар. науч. конф. «Математика. Образование. Культура». (г. Тольятти, 2005 г.). Тольятти : ТГУ, 2005. С. 92–94.
2. Кольцов Ю. В., Добровольская Н. Ю. Нейросетевые модели в адаптивном компьютерном обучении // Educational Technology & Society. 2002. № 5 (2). С. 213–216.
3. Ростовцев В. С. Искусственные нейронные сети : учебник. Киров : Изд-во ВятГУ, 2014. 208 с.
4. Руанет В. В., Хетагурова А. К. Нейросетевые технологии как средство организации образовательного процесса // Образовательные технологии и общество. 2005. Т. 5, № 4. С. 296–317.

Алгоритмизация и цифровизация в процессе изучения математики в вузе

Наталья Владимировна Наземнова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
natalianazemnova@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается один из математических приемов, который дает большие возможности рационального сочетания приемов понимания и запоминания учебного материала студентами – это использование алгоритмов. Предлагается математическая модель «Алгоритм и цифра» в высшей школе.

Ключевые слова: алгоритм, дискретность, результативность, массивность, блок-схема, псевдокод, цифровая грамотность

Algorithmization and digitalization in the process studying mathematics in higher education institution

Natalija V. Nazemnova

Penza State University, Penza, Russia
natalianazemnova@yandex.ru

Abstract. The article deals with one of the mathematical technique, that gives rich opportunities of a rational combination of the techniques of understanding and memorization of educational material by students, that is using of algorithms. The mathematical model «Algorithm and figure» in advanced mathematics is offered.

Keywords: algorithm, discreteness, performance, massiveness, blok-diagram, pseudocode, digital literacy

Преподавателю в университете можно рекомендовать организовать учебный процесс так, чтобы студенты получили прочные знания по математическим дисциплинам. Перед преподавателем стоит задача научить студента ориентироваться в информации, уметь находить нужную, осмысливать ее, анализировать, делать обобщения и выводы, применять ее в новых подходах (цифровизация образования).

Рассмотрим один из методических приемов, который дает богатые возможности рационального сочетания приемов понимания и запоминания учебного материала – это использование алгоритмов. Попробуем проанализировать этапы формирования алгоритмической культуры у студентов в процессе их обучения математике и показать посредством составления алгоритмов к математическим упражнениям и задачам

и формировать алгоритмическую культуру, как основу успешной цифровизации учебного процесса. Для этого в первую очередь необходимо обеспечение практических занятий студентов современной цифровой техникой, которая постоянно устаревает и ее необходимо заменять новой. Студенты овладевшие приемом составления алгоритмов в своей будущей деятельности захотят использовать цифровые устройства, как важное средство ее переосмысления с этой целью разберем использование упражнений, способствующих формированию алгоритмической культуры, которая помогает формированию поиска алгоритмических способов разрешения проблемных ситуаций. Высшая математика дает большой потенциал для обучения студентов алгоритмическим правилам. Хотя нам известно, что не любая математическая задача имеет алгоритмический способ решения. Решение даже самой сложной задачи можно представить в виде упорядоченной системы действий. Существует множество определений алгоритма, приведем некоторые из них.

Известный математик Б. В. Гнеденко, оценивая значения алгоритмического подхода в обучении, писал: « При всем том мы убеждены, что сколь угодно далеко ни продвинулись достижения точной педагогики в овладении святой святыней обучения- в решении задач развития творческих способностей и логического мышления людей- в ней всегда будут занимать точечное место алгоритмические методы».

Алгоритм – это конечный набор правил, который определяет последовательность операций для решения конкретного множества задач и обладает пятью важными чертами: конечность, определённость, ввод, вывод, эффективность [Кнут, 1976].

Алгоритм – это всякая система вычислений, выполняемых по строго определённым правилам, которая после какого-либо числа шагов заведомо приводит к решению поставленной задачи [Колмогоров, 1987].

Приведем перечень наиболее важных свойств алгоритма:

1. Дискретность;
2. Элементарность шагов;
3. Определенность (детерминированность).
4. Результативность.
5. Массовость.

1. **Дискретность.** Шаги в алгоритме должны идти в определенной последовательности.

2. **Элементарность шагов.** Каждый шаг программы, задающей алгоритм, должен состоять из выполнимых действий.

3. **Определенность.** Каждая программа, задающая алгоритм, должна состоять из конечного числа шагов, а каждый шаг должен быть точно и однозначно определен. Это свойство алгоритмов называется свойством определенности (или детерминированности).

4. **Результативности.** Программа, задающая алгоритм, должна быть направлена на получение определенного результата. Получение

результата за конечное число шагов составляет свойство результативности алгоритма.

5. Массовость. Программа, задающая алгоритм, должна быть применима к любой задаче рассматриваемого типа. Другими словами, каждый алгоритм предназначен для решения не одной-единственной, а любой из некоторого бесконечного класса однотипных задач.

Алгоритмы иногда можно получить экспериментально, подбирая действия, приводящие к желаемому результату. Их не выделяют в отдельную группу и условно относят к эмпирическим.

Как бы ни был получен алгоритм, он должен быть обоснован; это означает, что если алгоритм создан для решения определенной задачи, то необходима уверенность в том, что для всех исходных данных, для которых эта задача может быть решена, алгоритм позволяет получить решение и ни для каких исходных данных не дает неправильного результата. Это называется корректностью алгоритма. Очень интересен вопрос об установлении корректности алгоритмов, полученных на основе других, ранее разработанных и заведомо корректных алгоритмов. Решение этого вопроса зависит от приема, который был применен для получения нового алгоритма.

Перечислим наиболее часто применяемые приемы.

1) Конструирование алгоритмов. Этот прием заключается в том, что новый алгоритм получают комбинированием уже известных алгоритмов как составных частей.

2) Эквивалентные преобразования алгоритмов. Два алгоритма называют эквивалентными, если: а) всякий вариант исходного данного, допустимый для одного из них, допустим и для другого; б) применимость одного алгоритма к какому-либо исходному данному гарантирует, что и другой алгоритм применим к этому исходному данному; в) результаты, даваемые этими алгоритмами для одного и того же исходного данного, между собой одинаковы.

Всякое изменение алгоритма, в результате которого снова получается алгоритм и при этом эквивалентный исходному алгоритму, называется эквивалентным преобразованием алгоритма. Примером эквивалентного преобразования алгоритма является его перевод с одного языка на другой.

3) Сужающие преобразования. Они приводят к алгоритмам решения задач, являющихся частными случаями тех задач, для решения которых были предназначены исходные алгоритмы.

4) Применение формального метода к нематематической проблеме. Этот прием заключается в том, что нематематическую проблему формулируют математически. При этом может оказаться, что известен алгоритм решения получившейся математической задачи. Этот алгоритм и принимается за искомый. Если готового алгоритма не окажется,

то делают попытку его разработки, тем самым обращаясь ко второму из указанных выше источников для получения алгоритмов.

Корректность алгоритмов, полученных путем конструирования, не вызывает сомнений, если алгоритмы, использованные в качестве «строительного материала», дают точные результаты. Если же их результаты являются приближенными, как это часто бывает на практике, то обоснование корректности может требовать сложных исследований. Существуют различные способы записи алгоритмов:

- словесно-формульная,
- блок-схема,
- псевдокод (алгоритмические языки).

Для исполнителя-человека алгоритм может быть представлен предложениями обычного текста с использованием в случае необходимости математической или другой символики.

Тема «Неопределенный интеграл» принадлежит к разделу «Интегральное и дифференциальное исчисление» курса высшей математики.

Тема является узловой и предполагает большое количество часов на изучение. Однако зачастую студенты имеют разрозненные и несистематизированные знания в аспекте указанной тематики. Тема также не является новой и в учебной литературе. В учебниках и учебных пособиях Фридмана М. Н., Фихтенгольца Г. М., Ермаковой В. И., Вединой О. И., Берманта А. Ф., Тарасова Н. П., Марона И. А. и др. приводится теоретическое обоснование данной темы, приводятся примеры и задачи для закрепления изученного материала. Методика обучения нахождению неопределенного интеграла в литературе освещена недостаточно, имеются разобранные примеры для самостоятельного решения, вопросы для самопроверки. Однако не методических рекомендаций по решению, ни алгоритмов вычисления неопределенного интеграла для функций разных типов нет.

Нахождение интеграла можно осуществлять различными методами: интегрирование по частям, интегрирование заменой переменной, интегрирование методом неопределенных коэффициентов, метод Остроградского и т.д. Интегрирование методом введения переменной (метод замены) лежит в основе интегрирования неопределенных интегралов различными методами. Метод замены в календарно – тематическом аспекте возглавляет перечень методов интегрирования и является основой в решении многих последующих интегралов. Многообразие возможных подынтегральных выражений делает возможность верной подстановки (замены) процессом эвристическим и требует от студентов глубокой поисковой деятельности. Часто студенты двигаются буквально вслепую в выборе функции для замены. Возникает необходимость в разработке алгоритмов вычисления неопределенных интегралов методом замены. При вычислении интегралов обучающийся должен овладеть следующим содержанием.

Студент должен знать: определения неопределенного интеграла, первообразной, дифференциала; способ записи; свойства неопределенного интеграла, дифференциала; таблицу интегралов и производных; порядок интегрирования; виды интегрируемых выражений.

Студент должен уметь: определять вид интегрируемого выражения; находить самостоятельно неопределенный интеграл, применяя таблицу интегралов; применять алгоритм вычисления; воспроизводить таблицу интегралов и производных при вычислении интегрируемых выражений; делать проверку результата интегрирования дифференцированием. Для достижения указанных результатов обучения можно предложить обучающимся алгоритмы для вычисления неопределенного интеграла дифференцировано по типу подынтегрального выражения. Сначала представим обобщенный алгоритм решения поставленной задачи.

1. Определяем вид интегрируемого выражения.
2. Подбираем необходимую подстановку, т.е. некоторое выражение, входящее в подынтегральную функцию, обозначаем через новую переменную $t = \varphi(x)$.
3. Выражаем старую переменную через новую $x = \psi(t)$. Находим дифференциал $dx = \psi'(t)dt$. Выражаем через исходную переменную оставшиеся множители подынтегрального выражения.
4. Вычисляем получившийся интеграл.
5. Делаем обратную замену $t = \varphi(x)$. и дифференцируем результат для проверки интегрирования (при необходимости).

Рассмотрим алгоритмы для вычисления неопределенного интеграла.

Алгоритм для интеграла вида $\int \sin^m \alpha x \cos^n \beta x dx$.

Проверяем, является ли подынтегральное выражение рациональной функцией относительно $\sin x$ и $\cos x$.

1. Рассматриваем показатели.
 - 1.1. Если число m нечетное, можно применять подстановку $t = \cos x$.
 - 1.2. Если число n нечетное, можно применять подстановку $t = \sin x$.
 - 1.3. Если сумма чисел $m + n \rightarrow$ четная, можно применять подстановку $t = \operatorname{tg} x$ (или $t = \operatorname{ctg} x$).
 2. Выражаем старую переменную через новую.
 3. Находим дифференциал. Выражаем через исходную переменную оставшиеся множители подынтегрального выражения.
 4. Вычисляем получившийся интеграл.
 5. Делаем обратную замену.
 6. Дифференцируем результат (проверка интегрирования).
- Проиллюстрируем действие указанного алгоритма на примере.

Пример 1. Найти интеграл $\int \sin^3 x \cos^{10} x dx$.

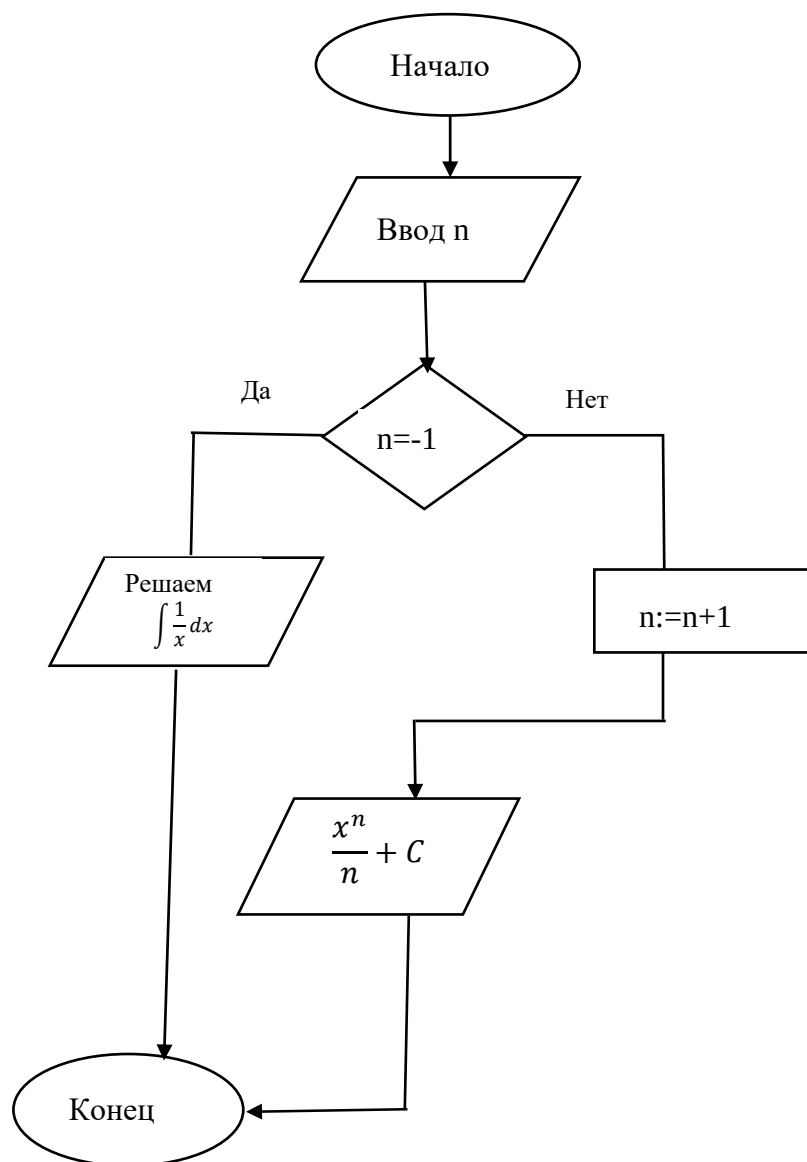
Решение.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^{10} x dx &= \int \sin^2 x \cos^{10} x \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^{10} x d(\cos x) = \\ &= \int \cos^{10} x dx (\cos x) + \int \cos^{12} x dx (\cos x) = -\frac{\cos^{11}}{11} + \frac{\cos^{13}}{13} + c. \end{aligned}$$

При вычислении неопределенных интегралов можно пользоваться блок-схемой:

Непрерывная функция $f(x)$
↓
Неопределенный интеграл $\int f(x) dx$
↓
Семейство первообразных $F(x) + C$

Пример 2. $\int x^n dy = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$



Последний способ записи алгоритмов – *псевдокод* (алгоритмические языки). Большинство используемых в программировании алгоритмических языков имеют общие черты. При изложении идеи алгоритма на начальных стадиях разработки компьютерных программ не всегда целесообразно пользоваться каким-либо конкретным языком программирования, чтобы не загромождать изложение несущественными деталями. В таких случаях применяется неформальный алгоритмический язык, максимально приближенный к естественному. Язык такого типа называют псевдокодом. Псевдокод – это компактный неформальный язык описания алгоритмов, использующий ключевые слова языков программирования, но опускающий несущественные подробности и специфический синтаксис. Запись алгоритма на псевдокоде зачастую яснее и нагляднее, она дает возможность свободно выбирать уровень детализации, начиная от описания в самых общих чертах и кончая подробным изложением. Псевдокод – ориентированный на исполнителя «человек» частично формализованный язык, позволяющий записывать алгоритмы в форме, весьма близкой к алголоподобным языкам программирования. Термин «частично формализованный» в данном случае означает, что в псевдокоде строго определены только правила записи управляющих структур, а описание самих действий остается естественным. Псевдокод имеет русскоязычную основу и используется, в основном, при обучении азам программирования.

Алгоритм, представленный с помощью псевдокода, представляет собой последовательность строк, в каждой из которых содержится описание действий либо по обработке данных, либо по управлению процессом обработки. Для записи управляющих структур приняты следующие обозначения:

- внешнее оформление: АЛГ – начало алгоритма, ПРОЦ – начало процедуры, КНЦ; - конец процедуры, КНЦ. – конец алгоритма;

- ветвление: ЕСЛИ ...ТО...ИНАЧЕ...ВСЕ; после ЕСЛИ ставится описание логического условия, по которому происходит ветвление, после ТО – описание действий (их может быть несколько), которые выполняются при значении условия TRUE, если ветвление полное – после ИНАЧЕ описываются альтернативные действия, в любом случае в конце ставится слово ВСЕ, которое служит признаком окончания данной конструкции;

- цикл: ПОКА...ПОВТОРЯТЬ...КЦ; после ПОКА ставится описание логического условия выполнения команд цикла, после ПОВТОРЯТЬ – описание действий (тела цикла), КЦ – признак конца циклической конструкции.

Часто при записи алгоритма отдельные действия заканчиваются разделителем (например, «;») – это позволяет избежать ошибок в случае, если описание действия занимает не одну строку. Помимо

этого, для удобочитаемости и наглядности применяется так называемая «структурная запись», при которой запись отдельных элементов структур производится не с начала строки, а с отступом, показывающим вложенность и подчиненность этих элементов.

Близость конструкций псевдокода языкам программирования позволяет легко перейти от одного к другому. Однако отсутствие формальных правил записи действий не позволяет использовать псевдокод для составления алгоритмов, исполнителями которых являются технические устройства.

Теория алгоритмов строит и изучает конкретные модели алгоритмов.

С развитием вычислительной техники теории программирования возрастает необходимость построения новых экономических алгоритмов, изменяются способы их построения, записи алгоритмов на языке, понятном исполнителю. Особый тип исполнителя алгоритмов – компьютер, поэтому необходимо создать специальные средства, позволяющие, с одной стороны разработчику в удобном виде записывать алгоритмы, а с другой – дающие компьютеру возможность понимать написанное. Такими средствами являются языки программирования.

Из сказанного можно сделать вывод, что алгоритмы являются одной из ступеней при переходе к цифровой грамотности.

Список литературы

1. Гнеденко Б. В. Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ. М. : Либроком, 2013. С. 584.
2. Колмогоров А. Н. Теория информации теория алгоритмов. М. : Наука, 1987.
3. Костюк Ю. Л., Фукс И. Л. Основы разработки алгоритмов. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2010.
4. Криницкий А. Н. Алгоритмы вокруг нас. М. : Наука, 1984.
5. Столяр С. Е., Владыкин А. А. Информатика. Представление данных и алгоритмы. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2007.
6. Паронджанов В. Учись писать, читать и понимать алгоритмы. М. : ДМК Пресс, 2012.
7. Князева М. Д. Алгоритмика. От алгоритма к программе. М. : КУДИЦ-Образ, 2006.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. для студентов физ. и механ.-мат. специальностей вузов : в 3 т. М. : Физматлит ; СПб. : Нев. Диалект, 2021.

О профессиональной направленности математической подготовки будущих юристов

**Татьяна Вячеславовна Черушева¹,
Наталья Васильевна Зверовщикова²,
Павел Владимирович Айкашев³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹tank1100@yandex.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru, ³aikashev.pavel@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются приемы организации учебной деятельности студентов юридического профиля при изучении курса «Математика», направленные на их профессиональное становление. Приводятся профессионально ориентированные примеры и задания из разных разделов математики.
Ключевые слова: профессионально ориентированные задачи, обучение математике, профессиональное самоопределение

About the professional orientation of mathematical training of future lawyers

**Tatyana V. Cherusheva¹, Natalya V. Zverovshchikova²,
Pavel V. Aikashev³**

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia
¹tank1100@yandex.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru, ³aikashev.pavel@mail.ru

Abstract. The methods of organizing the educational activities of law students in the course "Mathematics" aimed at their professional development are considered in the article. Professionally-oriented examples and tasks from different branches of mathematics are given.

Keywords: professionally-oriented tasks, teaching mathematics, professional self-determination

Происходящие в настоящее время в России глубокие социально-экономические изменения по новому ставят задачи необходимости значительного повышения качества подготовки конкурентноспособных и грамотных специалистов не только в области инженерно-технического профиля, но и в гуманитарных областях. В эпоху постнеклассического развития науки математика все в большей степени становится необходимым атрибутом современной науки, в том числе и гуманитарной. Не стала исключением и юридическая сфера. Современный этап развития юридической науки характеризуется значительным ростом объема нормативно-правовой, уголовно-статистической, криминологи-

ческой информации, для анализа которой используют математические методы исследования. Такие области юриспруденции, как государственное управление, криминология, правовая статистика, имеют дело с количественными параметрами, которые касаются количественных оценок правового регулирования, состояния и уровня преступности и т.д.

Наиболее важными отличительными чертами современной системы образования являются фундаментализация, опережающий характер всей системы образования, ее нацеленность на востребованность полученных знаний в дальнейшей профессиональной деятельности.

Профессиональная направленность преподавания математики – это мотивация обучения, представляющая собой систему целей, потребностей и мотивов, которая способствует оптимальному овладению знаниями данного предмета.

Основной задачей изучения дисциплины «Математика» в многопрофильных колледжах, согласно требованиям государственных стандартов и действующих программ обучения, является не только овладение студентами математическими знаниями и умениями, требующимися для изучения специальных дисциплин базового уровня, но и умениями решать профессиональные задачи с использованием математических методов.

Курс математики в многопрофильном колледже имеет ряд особенностей. Математика, изучаемая в школе в 10–11 классах, должна быть пройдена за один год. Студентам колледжа (направление 40.02.02 «Правоохранительная деятельность») приходится учить одновременно два предмета: алгебра и начала анализа и стереометрия. В силу ограниченности времени, происходит разделение: две трети учебного года изучается алгебра и начала анализа, а оставшуюся часть времени – стереометрия. Элементы вероятности и статистики входят в алгебру и начала анализа. Студенты юридического института (ЮИ), обучающиеся по направлениям 40.03.01 «Юриспруденция» (бакалавриат), 40.05.02 «Правоохранительная деятельность» (специалитет) математику изучают в лучшем случае один семестр.

Преподавание предмета идет таким образом, что теоретическая часть дается отдельно от практической. Опыт преподавания показывает, что лучше всего излагать материал компактными блоками, ставя перед учащимися достижимые цели и задачи практически на каждом занятии.

Для более лучшего усвоения теоретического материала на лекциях необходимо рассматривать решение типовых примеров. Именно упражнения превращают простое знание математики в совершенное владение ею.

Важным элементом профессиональной культуры современного юриста служит не только знание законов, но и умение логически

мыслить, проводить доказательства, владеть методами обработки данных. Значит, курс математики для юристов должен, с одной стороны, быть достаточно широким, чтобы играть развивающую, гуманитарную роль. Математика развивает логическое и алгоритмическое мышление, способность к абстрагированию, такие качества мышления как гибкость, конструктивность, критичность. Это соответствует следующим умениям: применять основные методы математического анализа к решению поставленных задач; применять доказательства и алгоритмы решения, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Курс математики студентов колледжа должен быть и достаточно содержательным, чтобы студенты научились решать несложные прикладные задачи. Это соответствует знаниям стандартных приемов решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использования готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств; основных понятий, идей и методов математического анализа. То есть курс математики весьма содержателен. У студентов ЮИ в курс математики должны входить такие темы, как решение систем, производные и интегралы.

Студенты колледжа и ЮИ также должны владеть знаниями по теории вероятности и элементам математической статистики.

Математика для юриста представляет собой, прежде всего, общеобразовательную дисциплину, которая дает возможность осуществлять математическую обработку цифровых данных. Однако само содержание юридической деятельности, требующее умения комбинировать и просчитывать варианты, логически мыслить в условиях неполной информации, учитывать случайность тех или иных событий, работать с правовой статистической информацией формирует перечень разделов математики, необходимых современному юристу. Это теория вероятностей, математическая логика, комбинаторика, математическая статистика.

Ю. Д. Блувштейн [1] на основе теории вероятностей, методов математической статистики, коэффициента корреляции, линии регрессии и других методов проанализировал вопросы количественного подхода к понятию преступления, человеческого поведения как вероятностной системы, структурно-динамических колебаний преступности, выявил с помощью статистических методов содержание ряда конкретных криминологических методик и принципы объяснения полученных результатов. И студентов колледжа необходимо подготовить к практической деятельности не примере решения специальных задач.

В практической деятельности, например, военному юристу часто приходится иметь дело с самыми разнообразными ситуациями. Количество возможных вариантов решения возникающих проблем может быть достаточно велико. Умение анализировать сложившуюся обстановку, адекватно её оценивать и делать правильные выводы является важным

качеством каждого профессионала. Во многих случаях практика приводит к так называемым комбинаторным задачам. Комбинаторика – это раздел математики, который занимается изучением методов составления различных комбинаций символов, предметов, объектов или действий. Сюда относятся задачи следующего вида:

- сколько цифровых комбинаций необходимо перебрать, чтобы открыть, не зная кода, трехзначный кодовый замок?
- сколько номеров автомобилей может выдать автоматизированная информационная система ГИБДД, если автомобиль разыскивается только по одной букве и одной цифре его регистрационного кода?
- сколько существует вариантов последовательного рассмотрения пяти следственных версий?
- сколько команд можно передать подразделению с помощью трех ракет красного, зеленого и белого цветов?

Задачи такого типа решаются с помощью соответствующих формул комбинаторики и поэтому называются комбинаторными. При изучении темы: «Комбинаторика» на практическом занятии по математике предлагаем рассмотреть следующую ситуацию. *В дежурную часть поступило сообщение о попытке ограбления. По словам потерпевшего, нападавший был коренастым мужчиной со смуглым лицом и темными волосами. Начав розыск правонарушителя по этим приметам, направляют запрос в информационный центр управления.*

В банке данных информационного центра в информационно-поисковых картах на лицо указывается 6 признаков телосложения (худощавое, полное, коренастое и др.), 12 признаков волос (светлые, рыжие, седые, темные и т.д.) и 9 признаков лица (смуглое, худое, конопатое и пр.). Комбинация трех указанных признаков имеет $N = 6 \cdot 9 \cdot 12 = 648$ вариантов, то есть сочетание примет «коренастый со смуглым лицом и темными волосами» будет повторяться в среднем у каждого 649-го мужчины. Таким образом, если, например, зарегистрировано 10000 мужчин, под указанную комбинацию попадут $N = 10000:648 \approx 16$ чел.

В юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, цель которых – выявить истину. Любой правовед, как и математик, должен уметь рассуждать логически, применять на практике индуктивный и дедуктивный методы. Специфика юридической деятельности состоит в постоянном применении таких логических приемов и методов, как классификация, аргументация, опровержение и т.д. Без знания этих приемов сложно правильно спланировать следственные действия, т.е. не допускать ошибок при составлении протоколов осмотра места происшествия, подготовить постановление, заключение и другие официальные документы. Судебная практика знает множество примеров, когда логическая ошибка

в рассуждениях обвинителя, подмеченная адвокатом, «развалила», казалось бы, безупречно подготовленные уголовные дела.

Приведем несколько примеров профессионально-ориентированных задач, реализуемых в МК при ПГУ для формирования общепрофессиональных компетенций у будущих юристов при изучении дисциплины «Математика».

I. Тема: «Основные теоремы теории вероятностей»

Задача. Адвокат в суде в среднем выигрывает 80 % дел. Найти вероятность того, что он из 6 дел выигрывает больше половины.

На конкретной задаче показываем, что теория вероятностей юристами также используется. Перед любым судебным разбирательством существует лишь вероятность того или иного решения суда, которую можно посчитать.

На практических занятиях по математике студентам демонстрируем, что в целом спектр применения вероятностных знаний довольно значим. Например, они могут быть использованы для определения направления расследования, определения круга поиска доказательств, определения оснований для принятия некоторых процессуальных решений.

Задача. Расследование происшествия: пусть двое подозреваемых стреляли одновременно и независимо один от другого. Вероятность попадания первого равна 0,7, второго равна 0,8. Найти вероятность того, что оба стрелка могли попасть в цель.

Проанализировав полученные результаты можно сделать выводы для правильного расследования происшествия.

II. Тема «Математическая статистика»

Задача. Определите по приведенным данным среднее число уголовных дел, оконченных производством одним следователем, моду и медиану:

За месяц окончено уголовных дел с последующей передачей в суд	До 5	5–10	10–20	Свыше 20
Число следователей	4	10	30	25

Решение:

Обозначим: x_i – середина интервала; f_i – частота интервала.

Тогда среднее число уголовных дел, оконченных производством одним следователем:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{2,5 \cdot 4 + 7,5 \cdot 10 + 15 \cdot 30 + 25 \cdot 25}{4 + 10 + 30 + 25} = \frac{1160}{69} \approx 16,8 \text{ ед.}$$

Мода:

$$M_o = x_{M_o} + h \cdot \frac{f_{M_o} - f_{M_{o-1}}}{(f_{M_o} - f_{M_{o-1}}) + (f_{M_o} - f_{M_{o+1}})} =$$

$$= 10 + 10 \cdot \frac{30 - 10}{(30 - 10) + (30 - 25)} = 18.0 \text{ ед},$$

где x_{M_o} – нижняя граница модального интервала; h – интервал группирования; $f_{M_o}, f_{M_{o-1}}, f_{M_{o+1}}$ – частоты модального, предмодального и послемодального интервалов.

Мода определяет величину наиболее вероятного значения числа уголовных дел, оконченных производством одним следователем.

Медиану определим по формуле:

$$M_e = x_{M_e} + i \cdot \frac{0,5 \sum f - S_{M_{e-1}}}{f_{M_e}} = 10 + 10 \cdot \frac{0,5 \cdot 69 - 14}{30} = 16,8 \text{ ед},$$

где x_{M_e} – нижняя граница медианного интервала; $S_{M_{e-1}}$ – суммарная частота предмедианного интервала; f_{M_e} – частота медианного интервала.

Значение медианы в данном случае характеризует средину распределения следователей по числу уголовных дел, оконченных производством одним следователем.

Результаты статистической сводки и группировки, как правило, помещаются в статистических таблицах и графиках, представляющих собой рациональное, наглядное, компактное и систематизированное изложение статистических показателей. Статистический ряд распределений – упорядоченное распределение единиц совокупности на группы по определенному варьирующемуся признаку. В зависимости от признака, положенного в основу ряда распределения, различают атрибутивные и вариационные ряды.

Атрибутивным называют ряд распределения, построенный по качественным признакам. Вариационным называется ряд распределений, построенный по количественным признакам. В зависимости от характера признака вариации различают дискретные (прерывные) и интервальные (непрерывные ряды) ряды.

В случае дискретной вариации величина количественного признака принимает только фиксированные значения. Например, данные о нагрузке судей военного суда представлены в виде вариационного ряда (табл. 1).

Таблица 1

Нагрузка судей

Число дел	17	42	47	50	63	68	75	78	80	85
Число судей	1	1	2	3	1	2	1	1	2	1

Построение интервальных рядов целесообразно при непрерывной вариации признака. Пример интервального ряда (табл. 2).

Статистические таблицы высокоинформативны и в определенной мере наглядны. Но проникновение в их цифровое содержание требует серьезного сравнительно анализа. Большой наглядностью обладают графики, составленные на основе табличных данных. График позволяет быстро уловить важнейшие тенденции и закономерности изучаемого явления, предположить его возможное развитие в будущем.

Таблица 2

**Группировка регионов России по количеству
зарегистрированных преступлений**

Группы регионов по числу зарегистрированных преступлений	Число регионов
55–1035	7
1036–2016	35
2017–2997	46
2998–3977	11

Примерами различных типов средних значений служат: полу-сумма крайних значений, мода, медиана, средняя арифметическая, геометрическая средняя.

Самым распространенным видом средней величины является средняя арифметическая. Средняя арифметическая используется при оценке нагрузки оперативных работников и других сотрудников юридических учреждений, при расчете абсолютного прироста или снижения преступности, уголовных и гражданских дел, других единиц измерения. Например, имеются следующие данные о возрасте и количестве осужденных (табл. 3).

Таблица 3

**Возраст и число осужденных
за тяжкие телесные повреждения**

Возраст, годы	Число осужденных
18	7
19	10
20	7
21	5
22	6
23	4

Средний возраст осужденных, вычисляется с использованием арифметической средней:

$$X = 18 \cdot 7 + 19 \cdot 10 + 20 \cdot 7 + 21 \cdot 5 + 22 \cdot 6 + 23 \cdot 4 + 10 + 7 + 5 + 6 + 4 = 78539 = 20,1 \text{ лет.}$$

Наряду с абстрактными средними, такими как средняя арифметическая и средняя геометрическая, в юридической статистике исполь-

зуются конкретные средние величины, значения которых занимают в ранжированном вариационном ряду определенное среднее положение. К таким конкретным средним относятся мода и медиана.

Модой в статистике именуется среднее значение варианта, которое чаще всего используется в данной совокупности. В табл. 4 приведены данные о совершенных тяжких преступлениях в пятидесяти регионах. В данном случае модой является значение 130.

Таблица 4

Данные о количестве тяжких преступлений

Количество преступлений	100	110	120	130	140
Число регионов	3	10	17	15	5

Медианой называется варианта, которая расположена в середине ранжированного ряда. Она разделяет упорядоченный ряд пополам. По обе стороны от медианы находится одинаковое число единиц совокупности (в данном примере медиана равна 120).

В исследованиях преступности используются и другие показатели, связанные непосредственно с математическими расчетами: коэффициент поражаемости преступностью; коэффициентам интенсивности; темп прироста (снижения) преступности; темп роста преступности; относительные величины степени и сравнения; индексы, отражающие степень общественной опасности разных преступлений; индекс тяжести совокупности преступлений, индекс судимости; тяжесть среднестатистического преступления; ряды распределения; степенной средней; взвешенной степенной средней; средне арифметическое (линейное) отклонение; дисперсия или средний квадрат отклонений; среднее квадратичное отклонение; коэффициент вариации.

Рассмотренные показатели средних значений или показатели вариации находят весьма широкое распространение в практике, например, для оценки равномерности тех или иных процессов.

На современном этапе развития юридической науки увеличился объем нормативно-правовой, криминологической, уголовно-статистической и иной информации, поэтому особую актуальность приобретает анализ математических средств и методов исследования разнообразных правовых явлений и процессов.

Достаточно большой вес математики в юридической науке объясняется рядом причин. Во-первых, правовые системы наряду с качественными свойствами обладают и количественной мерой. Во-вторых, математика как наука обладает содержательным понятийным аппаратом, с помощью которого представляется возможным отразить в абстрактном виде структуру отдельных правовых систем, их функции, происходящие в них процессы сбора, обработки информации.

На конкретных примерах показано, что теория вероятностей и математическая статистика юристами активно используется.

Опыт применения таких задач позволяет сделать вывод, что решение задач, фабулы которых содержат термины, сюжеты и действия субъектов основных правореализационных процессов, позволяет эффективно реализовать профессиональную направленность математической подготовки будущих юристов и повысить ее качество.

Таким образом, одним из стратегических направлений совершенствования методологии профессионального образования, применительно к специфике гуманитарных специальностей, является интеграция содержания учебных дисциплин, что должно отражаться в программах, методах и приемах преподавания математики и тем самым способствовать решению проблемы профессиональной направленности преподавания. Все предложенные нами формы организации учебной деятельности курса «Математика», направлены на повышение качества обучения студентов и становления их как грамотных специалистов, способных решать профессиональные задачи на высоком уровне.

Список литературы

1. Блувштейн Ю. Д. Криминология и математика. М. : Юрид. лит., 1974. 176 с.
2. Ахметов Г. Б. Решение криминологических задач на основе теории вероятностей // Юридическая наука и правоохранительная практика. 2009. № 3. С. 40–46.
3. Суходолов А. П., Иванцов С. В., Молчанов Т. В., Спасенников Б. А. Цифровая криминология: математические методы прогнозирования // Всероссийский криминологический журнал. 2018. Т. 12, № 2. С. 230–236.

**Моделирование показателей выпуска и занятости
инженерно-технических специалистов
Пензенского государственного университета**

**Татьяна Вячеславовна Черушева¹,
Наталья Васильевна Зверовщикова²,
Павел Владимирович Айкашев³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹tank1100@yandex.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru, ³aikashev.pavel@mail.ru

Аннотация. Проблема отсутствия сбалансированности спроса и предложения на рынке труда специалистов высшей и средней квалификации не только приводит к потерям человеческого капитала, но также в значительной мере препятствует инновационному и научно-технологическому развитию. Предварительный анализ показал, что во многом несбалансированность спроса и предложения труда инженерно-технических специалистов в России связана с процессом деиндустриализации и снижения престижности инженерной профессии, что привело к увеличению доли специалистов, не работающих по полученной специальности. В работе рассматривается экономическая модель, которая позволяет проводить прогнозы численности выпускников инженерно-технических специалистов и общего выпуска в Пензенском государственном университете. Результаты расчетов свидетельствуют о существовании проблемы отсутствия сбалансированности спроса и предложения на рынке труда инженерно-технических специалистов, а также показывают, что количество выпускаемых инженерно-технических специалистов уменьшается при увеличении общего числа выпускников.

Ключевые слова: модель спроса-предложения, математическая модель, прогнозирование

**Modeling of graduation and employment rates of engineering
and technical specialists of the Penza State University**

**Tatyana V. Cherusheva¹, Natalya V. Zverovshchikova²,
Pavel V. Aikashev³**

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia
¹tank1100@yandex.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru, ³aikashev.pavel@mail.ru

Abstract. The problem of unbalanced supply and demand in the labor market of specialists of higher and medium qualifications not only leads to the loss of human capital, but also significantly impedes innovation and scientific and technological development. Preliminary analysis has shown that in many respects the imbalance of supply and demand for engineering and technical specialists in Russia is related

to the process of deindustrialization and the decrease in the prestige of the engineering profession, which led to the increase in the share of specialists not working in their specialty. The paper considers the economic model, which allows to make forecasts, the number of engineering graduates and the total output at Penza State University. The results of the calculations indicate the existence of the problem of lack of balance between supply and demand in the labor market of engineering technicians, and also show that the number of graduates from ITS is decreasing, while the total number of graduates is increasing.

Keywords: demand-supply model, mathematical model, forecasting

Введение

Проблема несбалансированности спроса и предложения инженерно-технических специалистов в настоящее время является актуальной для развитых и развивающихся стран. Нерешенные проблемы мониторинга потребности и подготовки кадров, нежелание предприятий инвестировать в переподготовку и обучение персонала, высокая профессиональная мобильность выпускников и опытных ИТС способствуют смещению восприятия работодателей в сторону дефицитности данной категории кадров. Помимо этого, развитие процессов автоматизации производств, внедрение робототехники в производство и сферу услуг оказывают значительное влияние на рынок труда, способствуя устареванию одних профессий и появлению новых, а также росту потребности в квалифицированных специалистах инженерно-технического профиля [1, 2]. Решение задач, связанных с модернизацией и реиндустриализацией экономики России, повышения инновационной активности, обеспечения экономической и национальной безопасности в условиях глобализации невозможны без дополнительного внимания проблемам развития отечественного инженерно-технического кадрового потенциала.

1. Моделирование числа выпускников инженерно-технических специальностей и общего выпуска в Пензенском государственном университете

При разработке общей модели для России учитывались проблемы, связанные с недостаточной статистической информацией (по численности ИТС, заработной плате), а также особенности российского рынка труда и экономики в целом.

При построении модели числа выпускников инженерно-технических специальностей и общего выпуска в Пензенском государственном университете использовались результаты, полученные в работе [3], где было показано, что динамика рынка труда ИТС может быть представлена с помощью рекурсивной паутинообразной модели. Переходной процесс подстройки спроса и предложения ИТС является следствием длительного периода подготовки кадров ИТС (4–6 лет). В разработанной модели предложение рабочей силы (выпуск ИТС) и количество занятых инженерно-технических специалистов зависит

от величины выпуска ИТС и численности работающих по специальности ИТС за прошлые 2 года.

Основные блоки модели. Представленная модель по данным ПГУ для исследования динамики численности занятых ИТС включает 2 блока: блок численности выпуска ИТС и блок численности занятых ИТС (рис. 1).



Рис. 1. Блок-схема модели численности занятых ИТС.

1. блок численности выпуска ИТС

$$GE(t) = b_1 GE(t-1) + b_2 GE(t-2), \quad (1)$$

2. блок численности занятых ИТС

$$ET(t) = b_3 GE(t), \quad (2)$$

где $GE(t)$ – численность выпуска ИТС ПГУ, $ET(t)$ – количество занятых ИТС среди выпускников Пензенского государственного университета.

Оценки параметров модели были получены с использованием данных по количеству выпускников ПГУ за 2018–2022 гг., источниками информации был региональный центр содействия и адаптации выпускников ПГУ [4]. Параметры модели (1)–(2) были оценены с помощью метода максимального правдоподобия (как векторная авторегрессия). Оценки параметров уравнений (1)–(2) приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Результаты оценивания параметров уравнений (1)–(2),
по данным о количестве выпускников ПГУ за 2018–2022 гг.**

Уравнение	Переменная		Фактор	Оценка параметра
(1)	GE	b_1	$GE(t-1)$	0.986
		b_2	$GE(t-2)$	–1.02
(2)	ET	b_3	$GE(t)$	–0.074

2. Результаты моделирования и апробация модели

Результаты моделирования выпуска и численности занятых ИТС свидетельствуют о достаточно высокой точности разработанной модели: среднеквадратическая ошибка постпрогноза для 2021–2022 гг. для численности выпуска ИТС ПГУ – 1,1 %, для численности занятых ИТС ПГУ – 6,7 %.

На рис. 2 и 3 показано сравнение полученных результатов моделирования с фактической численностью.

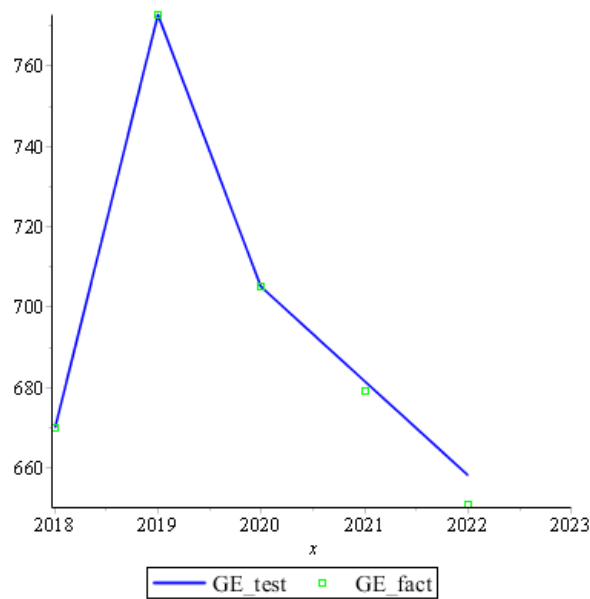


Рис. 2. Сравнение полученных результатов моделирования численности выпуска ИТС ПГУ *GE test* с фактической численностью выпуска *GE fact*

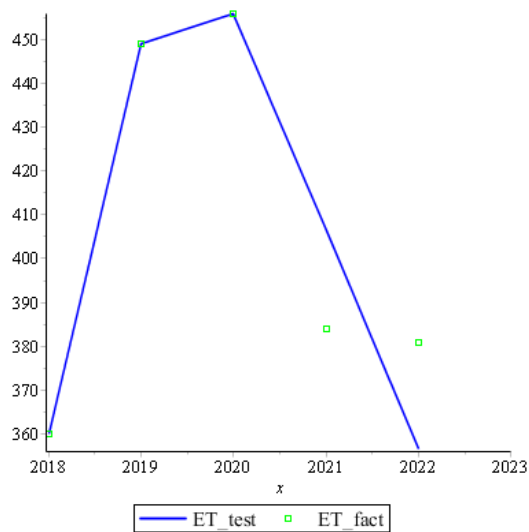


Рис. 3. Сравнение полученных результатов моделирования численности занятых ИТС ПГУ *ET test* с фактической численностью занятых выпускников ПГУ *ET*

Разработанная модель позволяет проводить предварительное моделирование численности занятых ИТС без учета изменения макроэкономических показателей.

Предложенная макро модель может быть использована для сценарного анализа сбалансированности спроса и предложения труда ИТС на краткосрочную перспективу.

Проведем расчет показателей выпуска и занятости ИТС на 2023–2025 года. Результат моделирования показан в табл. 3.

Таблица 2

Фактическое количество выпускников и работающих по специальности ИТС ПГУ за 2018–2022 гг.

Год	2018	2019	2020	2021	2022
Количество ИТС среди выпускников	670	773	705	679	651
Количество работающих по специальности ИТС среди выпускников	360	449	456	384	381

Таблица 3

Прогноз выпуска и количества работающих по специальности ИТС ПГУ на 2021–2025 гг.

Год	2021	2022	2023	2024	2025
Количество ИТС среди выпускников	682	659	636	615	593
Количество работающих по специальности ИТС среди выпускников	407	357	309	263	218

Невысокая точность модели численности выпуска ИТС может быть связана с недоучетом факторов, влияющих на формирование предложения труда.

Полученные результаты демонстрируют тенденцию к уменьшению числа выпускаемых инженерно-технических специалистов и снижение доли работающих по специальности ИТС в Пензенском государственном университете. Для исправления данной тенденции необходимо увеличить набор на технические специальности, повысить престиж инженерных специальностей и, самое главное, увеличить количество предприятий, где выпускники могли бы получить рабочие места.

Для дальнейшего развития модели необходимо включить в модель влияние заработной платы на инженерных направлениях в разных регионах Приволжского федерального округа и в непроизводственных отраслях.

Список литературы

1. Autor D. H. Polanyi's Paradox and the Shape of Employment Growth // MIT, NBER and JPAL. 2014. September 3.
2. Потенциал российских инноваций на рынке систем автоматизации и робототехники. Экспертно-аналитический отчет. РВК, 2014.
3. Freeman R. B. A cobweb model of supply and starting salary of new engineers // Industrial and new relations review. 1976. Vol. 29 (2). P. 236–248.
4. Региональный центр содействия трудоустройству и адаптации выпускников ПГУ. URL: <https://lider.pnzgu.ru/>

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Макеева Г. С. Математическая модель и результаты анализа нелинейной дифракции электромагнитных волн на магнитных нанорешетках	3
Макеева Г. С. Численный метод определения точек бифуркации нелинейного оператора Максвелла (уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау – Лифшица)	14
Макеева Г. С. Анализ параметрической неустойчивости волн в магнитных нанорешетках по точкам бифуркации нелинейного оператора Максвелла	20
Фараджев А. С., Мегралиев Я. Т. Об одной нелинейной обратной краевой задаче для интегро-дифференциального линеаризованного уравнения Буссинеска шестого порядка с дополнительным интегральным условием.....	28
Eshkuvatov Z. K., Mamatova H. X., Ismail Sh., Wahab A. F. Bounded and unbounded solutions of the system of Cauchy-type singular integral equations of the first kind by hybrid method	33

2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рассадин А. Э. Об одном смешанном функционально-дифференциальном уравнении	45
Садыхзаде Р. Ш., Мегралиев Я. Т. Обратная краевая задача для псевдогиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями.....	51

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Айкашев П. В., Темникова А. Г. К вопросу о моделировании антенн с заданной диаграммой направленности	57
Боженова М. В. Векторный алгоритм метода декомпозиции области	62
Бойков И. В., Бойкова А. И., Дружаева А. И. Вычисление интегралов на фракталах.....	67
Захарова Ю. Ф., Захаров О. В. Некоторые методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений	73
Грунина Т. В., Нестеров Д. Г. Моделирование процесса теплопереноса в неоднородном стержне в задаче с обратным временем	81

Кудряшова Н. Ю., Мойко Н. В., Гришин И. Г.	
Приближенные методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений.....	85
Кудряшова Н. Ю., Мойко Н. В., Багдалов С. Р.	
Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений с комплексно-сопряженными неизвестными	90
Кудряшова Н. Ю., Купряшина Л. А. Сеточный метод решения задачи аналитического продолжения на плоскости.....	95
Лапкин В. В., Коннов Г. А., Тарасов Д. В. Применение технологии OpenMP к численному решению интегральных уравнений	102
Тында А. Н., Танасов Г. Д. Численное решение обратной задачи для интегральной модели с двумя неизвестными линиями разрыва	109
Устимов В. О., Кудряшова Н. Ю. Исследование однородных разностных схем решения уравнений математической физики.....	114
Фролов Е. С. Численные методы решения уравнений математической физики на нейронных сетях.....	120
Фролов Е. С. Приближенное решение обратной задачи теории тонких пластин на нейронных сетях	128
Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, содержащих значения функции и ее производных.....	135
Читоркин Е. Е., Головашкин Д. Л. Сравнение реализаций блочного алгоритма FDTD-метода на графическом процессоре	140

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

Дюньдяева А. А. Задача о распространении ТЕ-волны в плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой	146
Кривошеева Ю. Ю., Головашкин Д. Л. Расчет волноводных фотонно-кристаллических структур с изгибами с помощью генетического алгоритма.....	151
Литвинов А. Н., Артамонов Д. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния слоистой структуры при контактном взаимодействии	157
Литвинов А. Н., Артамонов Д. В. Алгоритм оптимального расположения многослойного вибродемпфирующего покрытия на поверхности тонкостенной конструкции	164

Малов К. И., Пескова Е. Е., Язовцева О. С. Исследование химически реагирующих потоков средствами компьютерной математики	169
Ощенко Н. В. Исследование влияния прошлых воспитательных циклов на текущее воспитание цифрового двойника	176
Перекусихина А. Н. Применение фрактальной размерности для анализа микроструктуры полимерного композита	181
Петрова Ю. А. Характеристическое уравнение многослойного сферического резонатора	190
Санникова П. В. Особенности задач идентификации параметров динамических моделей	194
Тамарова Ю. А., Вельмисов П. А., Алексанин Н. Д., Анкилов Г. А. Математическое моделирование аэроупругой системы «трубопровод – датчик давления»	200
Тихов С. В. Нелинейная задача на собственные значения, описывающая распространение ТЕ-волны в диэлектрическом волноводе, покрытом слоем графена	208
Чалышов Г. В. Задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра	213

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

Аюпова А. С., Захаров Ю. Ф. Функциональные графы и их применение	216
Гринцов М. И., Гринцова В. М., Бофанова Н. С., Князькина Ю. А. Элементы теории канцерогенеза О. А. Барсукова и В. Е. Фортова	222
Гамаюнова А. С., Жуков А. В., Русецкий Н. В., Сидоров Д. Н. На пути к надежному сопоставлению сущностей: кейсы исследований фармацевтических наборов данных	231
Гринцов М. И., Гринцова В. М. Рождаемость и ионизирующая энергия галактических космических лучей	234
Десяев Е. В., Мамедова Т. Ф. Автоматизация формирования оптимального портфеля инвестиций	243
Дужникова П. А. Математическое моделирование распространения вирусных заболеваний	246
Меркушина Е. С. Аналитические и численные методы исследования математических моделей эпидемиологии	252
Шалаева А. А., Мамедова Т. Ф. Математическая модель динамики развития лесонасаждений	259

6. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

Байрамова А. М., Захарова Ю. Ф. Обзор основных стеганографических алгоритмов.....	262
Бойков И. В., Бойкова А. И., Горишкова Ю. М. Десятая проблема Гильберта и искусственный интеллект	267
Калабкин Е. С., Мамедова Т. Ф. Абстрактный конечный автомат выгрузки сообщений.....	274
Кутыркина М. А., Мамедова Т. Ф. Математическое моделирование динамики нейронных сетей при заболеваниях нервной системы	278
Переломов Н. А., Тарасов Д. В. Поиск гиперо- гипонимических отношений языка с использованием библиотек машинного обучения.....	282
Шумкин И. С. Применение нейронных сетей на графических процессорах общего назначения для задач распознавания изображений	287

7. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

Купряшина Л. А., Зверовщикова Н. В. Особенности организации спецкурса «Методика преподавания специальных разделов математики и информатики в учебных заведениях СПО и ДПП»	296
Леонова Т. Ю. Возможности применения нейронных сетей в образовательном процессе	303
Наземнова Н. В. Алгоритмизация и цифровизация в процессе изучения математики в вузе.....	307
Черушева Т. В., Зверовщикова Н. В., Айкашев П. В. О профессиональной направленности математической подготовки будущих юристов.....	315
Черушева Т. В., Зверовщикова Н. В., Айкашев П. В. Моделирование показателей выпуска и занятости инженерно- технических специалистов Пензенского государственного университета	324

Научное издание

Математическое и компьютерное моделирование
естественно-научных и социальных проблем

Материалы

*XVII Всероссийской с международным участием
научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов*

Россия, г. Пенза, 1–4 июня 2023 г.

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора Ильи Владимировича **Бойкова**

Mathematical and Computer Modelling of Natural Science
and Social Problems (MCM-2023)

*Proceedings of the Seventeen Russian Conference
with international participation MCM-2023*

Penza, Russian Federation, 1–4 June, 2023

E d i t e d b y
Илья В. Бойков

Все материалы представлены в авторской редакции

Корректор *А. Г. Темникова*
Компьютерная верстка *М. Б. Жучковой*
Дизайн обложки *И. В. Шваревой*

Подписано в печать 13.10.2023.
Формат 60×84¹/₁₆. Усл. печ. л. 19,41.
Заказ № 511. Тираж 100.

Издательство ПГУ.
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.
Тел.: (8412) 66-60-49, 66-67-77; e-mail: iic@pnzgu.ru